Adv. appl. Clifford alg. 19 (2009), 547–584

0188-7009/030547-38, *published online* October 22, 2009
DOI 10.1007/s00006-009-0183-2

Advances in Applied Clifford Algebras

Gustave Juvet (1896–1936) Un Pionnier Oublié des Études Cliffordiennes

C. Alunni

A la mémoire de Pertii Lounesto.

≪Ce n'est pas moi, c'est M. Juvet qui, dans *La Structure des nouvelles théories physiques*, écrit en 1933 : "C'est dans la surprise créée par une nouvelle image ou par une nouvelle association d'images, qu'il faut voir le plus important élément du progrès des sciences physiques, puisque c'est l'étonnement qui excite la logique, toujours assez froide, et qui l'oblige à établir de nouvelles coordinations". Il y a là de quoi confondre tous ceux qui persistent à nous demander des comptes...≫

André BRETON, *L'amour fou* [1937]
(Œuvres Complètes, p. 751)

≪*Nevertheless, spinors remain somewhat mysterious*≫
Jean-Pierre BOURGUIGNON (1995)

Introduction

L'objet essentiel de ce texte est de sensibiliser – et si possible de remobiliser – mathématiciens, physiciens et philosophes autour d'un nom propre et autour d'une œuvre qui semblent aujourd'hui bien injustement oubliés, pour ne pas dire totalement méconnus. Nul doute pour nous qu'une des tâches essentielles du philosophe consiste à réactiver non seulement ce qui appartient à la mémoire et au patrimoine scientifiques passés, mais ce qui, de manière souvent très sourde, travaille encore, inconsciemment, son tissu le plus vivant et le plus actuel.

Gustave Juvet, cet inconnu ! Et pourtant :

a. En 1925, voici ce qu'on pouvait lire en ouverture d'un ouvrage canonique, pratiqué par plusieurs générations d'ingénieurs, de mathématiciens et de physiciens du XXème siècle :

≪Ces dernières années ont été publiés des traités généraux consacrés au calcul absolu [ce qu'on appelle aujourd'hui le calcul tensoriel] : par exemple, ceux de Juvet (*Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu*, Blanchard, Paris, 1922), Marais (*Introduction géométrique à l'étude de la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1923) et Galbrun (*Introduction à la théorie de la relativité. Calcul différentiel absolu et géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1923). [...] Par exemple [concernant la découverte et le prolongement, indépendants du traité fondateur de Gregorio Ricci et Tullio Levi-Civita, paru en français dans les *Mathematik Annalen* en 1901, et ce sur la base d'une dérivation des schèmes tensoriels à partir de la notion fondamentale de "parallélisme"], la définition d'un tenseur et nombre d'anticipations algébriques de résultats visant à simplifier les démonstrations, se trouvent chez Weyl, Laue, et Marais, chacun d'eux établissant, à l'instar d'Eddington, un lien plus ou moins étroit entre différentiation covariante et parallélisme. Une discussion méthodique et complète de ce dernier point est également donnée par Juvet et Galbrun≫ [1].

b. En 1938, c'est au tour du grand Élie Cartan, dans un ouvrage également fondateur et qui est consacré à ses *Leçons sur la théorie des Spineurs* [semestre d'hiver 1935-1936] :

≪For the application of this algebra [the Clifford algebra] in the space of special relativity, see A. Mercier, "Expression des équations de l'Électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford", Thesis, Geneva, 1935 ; and G. Juvet, "Les rotations de l'espace euclidien à quatre dimensions, etc...", *Comment. Math. Helvet.*, 8, 1936, p. 264-304≫.

c. En 1954, l'*Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu* de Gustave Juvet [h][2], publié chez Blanchard en 1922, fait encore partie des références de J. A. Schouten (ainsi que [d] et [k])[3].

d. J'ajouterai volontiers la présence de textes de Juvet dans la *Gösta Mittag-Leffler Separate Collection*, aujourd'hui abritée par le département de mathématiques de l'Université de Lund[4].

[1]Tullio LEVI-CIVITA, *The Absolute Differential Calculus [Calculus of Tensors]*, Dover Publications, New York, 1977, p. VIII-IX. Il s'agit de la Préface à la première édition italienne de *The Absolute Differential Calculus*, parue à Rome sous le titre *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* [compilée par Enrico Persico], Stock, Roma, 1925.

[2]Les références entre [ ] renvoient désormais à la liste des publications de Juvet donnée en fin d'article.

[3]J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications*, Springer, Berlin, 1954, p. 457 et p. 230, note 1. Il s'agit de la seconde édition de *Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, 1924.

[4]Cette collection couvre la période 1881-1927. Mittag-Leffler (1846-1927) fut un spécialiste éminent mais conservateur de la représentation des fonctions analytiques. On lui doit en particulier, en 1877, un théorème qui généralise aux fonctions méromorphes la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Rappelons, pour l'anecdote, que Gösta Mittag-Leffler et Alfred Nobel courtisèrent la même femme, et que le coeur de celle-ci pencha pour le mathématicien.

Ces références, non exhaustives, devraient suffire pour piquer la curiosité de nos contemporains. J'ajoute, mettant un bémol à cet ≪oubli≫, que l'un des plus grands spécialistes du champ des études cliffordiennes, le regretté Pertti Lounesto, n'aura quant à lui jamais cessé de référencer les travaux pionniers de notre auteur[5].

1. Bref Portrait Intellectuel

Gustave Juvet est né le 25 septembre 1896 dans le même petit village jurassien que celui qui vit naître Jean Piaget, son collègue et ami : ce village porte le beau nom de la Côte-aux-Fées[6]. C'est à Neuchâtel qu'il passe sa jeunesse. Il partage ses années de gymnase avec Rolin Wavre et Jean Piaget. D'un caractère plutôt solitaire, il est passionné par ses cours de littérature française, féru de critique littéraire, tout en dévorant avec passion ses cours de science. Entre 1913 et 1916, trois penseurs agissent fortement sur sa destinée intellectuelle : Henri Poincaré par sa philosophie des sciences, Henri Bergson et Émile Boutroux. C'est une période où sa recherche d'un savoir positif était alors moins tournée vers les mathématiques que vers le biologisme chimique de Le Dantec. En 1915 il est reçu major au bachot, et c'est en 1917 qu'il obtient sa licence en mathématiques. Il montre à cette époque un intérêt marqué pour les critiques qu'Édouard Guillaume opposait à la théorie de la relativité restreinte[7]. En 1919 il prend rapidement sa licence française pour se préparer au Doctorat d'État. C'est le moment où son avidité mathématique va de pair avec une étude de la doctrine de Charles Maurras et une passion soudaine pour l'Action française et le royalisme de Léon Daudet. À Paris il suit, avec Rolin Wavre, un cours de Vessiot sur le problème des trois corps (solution Sundman) :

≪Il débutait par un exposé de la mécanique analytique où le futur directeur de l'École Normale projetait une lumière éclatante. Ce régal, nous l'absorbions ensemble

---

C'est pourquoi Nobel, craignant que son ancien rival soit récompensé, refusa l'institution d'un prix Nobel de mathématiques. Alfred Nobel en resta célibataire...

[5]Pertii Lounesto est mort noyé en Crête, le 21 juin 2002. Rappelons ici trois de ses ouvrages fondamentaux : Marcel RIESZ, E. Folke BOLINDER et Pertii LOUNESTO [dir.], *Clifford Numbers and Spinors, with Riesz's private lecture to E. Folke Bolinder and a historical review by Pertii Lounesto*, Kluwer Academic, Dordrecht-Londres, 1993 ; Rafal ABLAMOWICZ et Pertii LOUNESTO [dir.], *Clifford Algebras and Spinors Structures. A Special Volume dedicated to the Memory of Albert Crumeyrolle (1919-1992)*, Kluwer Academic, ≪Mathematics and its Applications, vol. CCCXXI≫, Dordrecht, 1995 ; Pertii LOUNESTO, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Cf. dans ce dernier ouvrage, réf. à [Cl3], Ch. 8, ≪Electromagnetism≫, note 7, p. 111, p. 117 ; réf. à [Cl1], Ch. 10, ≪The Dirac Equation≫, p. 150 (Voir aussi ≪Historical Survey≫, p. 148) et ≪Selected Reading≫, p. 300.

[6]Pour une biographie complète, cf. Rolin WAVRE, ≪Gustave Juvet, le mathématicien et l'ami≫, in *À la mémoire de Gustave Juvet (1896-1936)*, Université de Lausanne, Lausanne, 1937, p. 20-36.

[7]Sur cette question, cf. Angelo GENOVESI, *Il Carteggio tra Albert Einstein ed Edouard Guillaume. ≪Tempo universale≫ e teoria della relatività ristretta nella filosofia francese contemporanea*, Franco Angeli, Milano, 2000. Pour un long compte-rendu, cf. Charles ALUNNI, ≪Relativités≫, *Revue de Synthèse*, 5e série, Année 2005/2, Éditions-Rue d'Ulm, Paris, 2006, p. 532-534.

dans une sombre petite chambre de l'hôtel Corneille. Si dans cette collaboration, je pouvais apporter ma contribution, Juvet apportait la sienne dans des rapprochements aussi rapides qu'imprévus des différents théorèmes qu'une prodigieuse mémoire et une grande sensibilité aux harmonies mathématiques pouvaient seules faire deviner≫[8].

En 1919, calcul tensoriel et géométrie riemannienne sont choses nouvelles : Juvet se familiarise avec la théorie de la relativité générale par l'analyse de mémoires étrangers, mais surtout au Séminaire du Collège de France de Jacques Hadamard[9] et dans les conférences de Paul Langevin.

≪M. Langevin donnait un jour une conférence à la Société Mathématique de France ; à la planche noire, une seule formule : la forme quadratique de différentielle, le fameux ds^2. Ces dix coefficients contenaient la gravitation, et les géodésiques de l'espace correspondant fournissaient les trajectoires planétaires. En fallait-il davantage pour enthousiasmer Juvet ?≫[10].

C'est au Séminaire d'Hadamard, qui réunissait tout ce qui comptait de mathématiciens parisiens, que Juvet fit un exposé de la géométrie de Hermann Weyl. Persuadés qu'il fallait mettre dans les mains des chercheurs l'instrument technique sans lequel il n'est pas d'exposé exact et précis de la relativité générale - calcul tensoriel et calcul différentiel absolu portant sur les multiplicités riemanniennes -, Juvet et Leroy, un jeune normalien, entreprennent la traduction de ce qui représentait la somme des temps scientifiques nouveaux : *Raum, Zeit, Materie* de Weyl[11]. Ainsi, à 26 ans, Juvet fonde et dirige chez Blanchard une nouvelle collection, la ≪Collection de monographies scientifiques étrangères≫. Il y fera paraître (et traduira) entre autres auteurs : Arnold Sommerfeld sur *La constitution de l'atome et les raies spectrales* ; James Hopwood Jeans sur *La théorie dynamique des gaz* et sur *La théorie du rayonnement et des quanta* ; Alfred Wegener sur *La genèse des continents et des océans.* C'est à cette époque qu'il est nommé à l'Université de Neuchâtel, succédant à son ancien maître d'astronomie Legrandroy. 1922 est également la date où il publie son *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu* [h], préfacé par Jacques Hadamard. Il faut noter que Juvet a défriché une épaisse forêt de symboles, à une époque où les livres de Becquerel, Galbrun et la traduction d'Arthur Eddington n'étaient pas encore

[8]Rolin WAVRE, *op. cit.*, p. 25.

[9]≪Nous venions à peine de renaître à la vie scientifique - que la guerre, sans l'interrompre complètement, avait notablement ralentie - lorsque j'eus le très grand plaisir de faire la connaissance de M. Juvet. Il avait fallu attendre que nos jeunes gens, pas tous, hélas ! nous fussent rendus, pour reprendre nos réunions du Collège de France où nous essayions de suivre et d'analyser le mouvement mathématique contemporain. À ces réunions, nous vîmes ce jeune géomètre prendre une part de plus en plus active et de plus en plus heureuse≫, Jacques HADAMARD, *Préface* à [h].

[10]*Ibidem*, p. 26.

[11]Hermann WEYL, *Temps, Espace, Matière. Leçons sur la théorie de la relativité générale traduites sur la quatrième édition allemande* par Gustave Juvet et Robert Leroy, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1922.

parus[12]. C'est ce qui fait de Juvet un véritable pionnier de la relativité dans les pays de langue française. En 1926, il publie un deuxième livre de sa plume intitulé *Mécanique analytique et théorie des quanta* [n]. C'est l'année où il soutient sa Thèse en Sorbonne devant Élie Cartan, Ernest Vessiot et Paul Montel : *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi* [o]. En 1928, Juvet quitte Neuchâtel pour enseigner à Lausanne un cours d'analyse vectorielle pour les élèves de l'École d'ingénieurs. Ces cours amplifiés feront l'objet en 1933 d'une nouvelle publication, *Leçons d'analyse vectorielle. 1ère partie* [r]. Il y traite de la théorie des courbes gauches et des surfaces avec une grande élégance. Il y cherche l'expression synthétique et indépendante de tout système d'axe des réalités géométriques étudiées. Enfin, il expose de manière particulièrement originale les identités et opérateurs de l'analyse vectorielle. Nous y reviendrons plus bas. La seconde partie [t], parue en 1935, ≪plus volumineuse que cette première, permettra au lecteur de voir le sens physique des opérateurs vectoriels≫[13]. Elle implique les domaines de l'hydrodynamique, de la propagation des ondes, des fonctions harmoniques, de l'électromagnétisme classique et des éléments de la théorie des fonctions analytiques. Durant les années 1932-1933, il préside la *Société Mathématique Suisse* et s'occupe de la rédaction de la Revue Suisse de Mathématique, les *Commentarii.* Laissant de côté pour l'instant les nombreux articles originaux qui ont marqué son activité de mathématicien (voir sur ce point notre deuxième partie, *De Kaluza-Klein à Clifford*), citons, pour terminer ce bref portrait, son ouvrage philosophique fondamental, *La structure des nouvelles théories physiques* [ϕ_6] qui vit le jour en 1933. Soulignons que Gustave Juvet fut ainsi l'auteur de 48 publications relevant de la critique et philosophie des sciences, constellation sur laquelle nous reviendrons (voir infra, *La philosophie symplectique de Gustave Juvet*). C'est au cours d'une promenade en montagne que Gustave Juvet meurt d'une embolie le 4 avril 1936.

2. De Kaluza-Klein a Clifford

Si l'on peut sans conteste affirmer le caractère doublement pionnier de notre auteur (cf. points 2. et 3. de la bibliographie), il conviendra de revenir ici sur un parcours, un style et une sensibilité mathématiques qui l'ont inscrit si précocement dans cette double généalogie.

[12]Cf., Jean BECQUEREL, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation. Leçons professées en 1921 et 1922 à l'École Polytechnique et au Museum d'Histoire Naturelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1922 ; Henri GALBRUN, *Introduction à la théorie de la relativité. Calcul différentiel absolu et géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1923 ; Arthur Stanley EDDINGTON, *Espace, Temps et Gravitation. La théorie de la relativité généralisée dans ses grandes lignes. Exposé rationnel suivi d'une étude mathématique de la théorie*, traduit de l'anglais par Jean Rossignol (Introduction de Paul Langevin), Hermann, Paris, 1921.

[13]Gustave JUVET, [r], p. 6.

2.1. Entre Mécanique analytique & Géométrie différentielle

Le cours de Vessiot, le traité sur les *invariants intégraux* de Cartan, les *Vorlesungen* de Jacobi, quelques chapitres des nouvelles méthodes de la mécanique céleste de Poincaré, enfin la correspondance de Legendre et de Jacobi, tout cela rapproché, harmonisé par Juvet, forme la matière de son livre de 1926 [n] pour ce qui est de la mécanique analytique. Il rend plus maniables pour le physicien les instruments de premier ordre que sont les équations canoniques, le principe de Hamilton et l'équation de Jacobi :

> ≪La dynamique de l'atome, telle que M. Bohr l'a édifiée, fait intervenir, dans ses principes, les théorèmes de la mécanique analytique et certaines règles qui se rattachent à la théorie des quanta. L'énoncé de ces règles pour les systèmes simples est parfaitement élégant si l'on emploie la notion de transformation canonique, et leur unicité se démontre en recourant aux conséquences de la théorie des invariants intégraux. Les recherches de M. Bohr et de ses élèves ont permis de déterminer avec une grande précision, grâce à ces théories, les raies spectrales des éléments les plus simples. On a cherché à étendre l'application de ces règles à des systèmes dynamiquement plus compliqués et l'on a eu recours, pour réaliser cette généralisation, à la théorie des perturbations, particulièrement aux travaux de Poincaré consacrés à ce sujet≫[14].

On voit, *a posteriori*, ce que l'ouvrage pouvait avoir de tragique, comme tout ce qui se fondait à cette époque sur le modèle de Bohr et de Rutherford. On pensait alors que les mystères de la microphysique seraient levés pourvu que l'on sût approprier aux révolutions électroniques les méthodes analytiques qui avaient si bien réussi dans le domaine de la mécanique céleste. Or, les lois de la microphysique ne devaient se formuler que dans un langage de probabilité par des équations aux dérivées partielles ou par un calcul matriciel. Cependant, la nouvelle mécanique atomique, sous ses formes ondulatoire ou quantique, continuera de s'inspirer du symbolisme opératoire de cette mécanique analytique que le mathématicien Juvet est en train de synthétiser, le rendant ainsi maniable pour les physiciens. C'est ce qui est au coeur de sa Thèse d'État [o]. Rappelons, dans le langage de l'époque, que le principe de Hamilton de la mécanique classique s'exprime en disant qu'une certaine intégrale simple est stationnaire. Les extrémales de ce problème de calcul des variations sont fournies par les équations de Lagrange. Ces dernières sont équivalentes aux équations canoniques. À leur tour, ces équations sont les équations des caractéristiques d'une relation aux dérivées partielles de Jacobi où figure la fonction H de Hamilton. D'après un théorème classique de Jacobi, on sait que le mouvement sera déterminé sous forme finie par certaines relations, pourvu que l'on connaisse une intégrale complète de l'équation de Jacobi. Or, la théorie de la relativité introduisait à son tour un principe de Hamilton généralisé ; mais l'intégrale à rendre stationnaire était une intégrale quadruple portant sur l'univers à quatre dimensions. Il s'agissait alors de construire *l'analogue de l'équation de Jacobi* pour la variation d'une intégrale multiple. Le problème ainsi

[14] Gustave JUVET, [n], p. V.

posé était d'une extrême généralité, et Juvet se place d'emblée dans l'espace à n-dimensions[15]. Il démontre ensuite la complète intégrabilité de cette équation de Jacobi généralisée, condition introduite en calcul fonctionnel par Paul Lévy. Nous verrons plus loin que l'élément crucial qui traverse toute l'œuvre de Juvet n'est autre que son aptitude exceptionnelle à poursuivre aussi loin que possible *les analogies formelles.* Philosophiquement parlant cette montée progressive vers l'absolu des formes mathématiques et physico-mathématiques, ici à travers l'invariance des lignes vertébrales de la mécanique analytique, prépare déjà sa conception future, qualifiée de ≪platonicienne≫, d'un univers physique qui participe d'un monde mathématique en soi. Ses travaux en géométrie différentielle, *analyse vectorielle* et *calcul tensoriel*, vont renforcer ce sentiment en s'inscrivant dans une généalogie très précise. Comme pour la théorie des spineurs, la théorie vectorielle a connu avant elle plusieurs histoires : ≪*It should not be forgotten that the modern system of vector analysis is but one of the many vectorial systems created in the course of the history*≫[16]. Or, Gustave Juvet maîtrise et développe ce qui deviendra la version la plus ≪avancée≫ du calcul : l'approche *directe*, *intrinsèque*, *compactifiante*, *opératorielle* et *généralisante*.

≪Les traités de calcul vectoriel en langue française ne manquent pas ; ils sont presque tous excellents dans les chapitres où ils traitent de l'algèbre vectorielle et de la théorie des courbes et des surfaces ; quelques-uns d'entre eux exposent la théorie des champs d'une manière parfaite, mais très difficile pour des débutants ; d'autres introduisent les opérateurs différentiels par des considérations physiques fort suggestives, *mais qui peuvent en masquer la généralité* et qui rompent l'unité d'un exposé théorique ; enfin, les derniers définissent lesdits opérateurs au moyen de coordonnées et démontrent ensuite que cette définition est indépendante du choix des axes ; *cette méthode indirecte n'est pas conforme à l'esprit du calcul vectoriel*≫[17].

L'originalité de son approche tient dans son épuration du calcul, et ce, sur les traces d'un autre pionnier :

≪Ce qui distingue notre exposé, en ce qui concerne l'analyse vectorielle, c'est [...] qu'il est, grâce à une définition peu connue des opérateurs différentiels, parfaitement conforme à la doctrine même de ceux qui ont fondé le calcul vectoriel, algorithme direct destiné à faire une étude intrinsèque de certains êtres géométriques. Cette définition a été donnée pour la première fois, nous semble-t-il, par M. von Ignatowsky, dans sa *Vektoranalysis*≫[18].

[15]Gustave JUVET, *ibid.*, Chapitre IV, p. 23 sq., *Les transformations canoniques et les invariants intégraux.*
[16]Michael J. CROWE, *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967, p. VIII.
[17]Gustave JUVET, [r], Préface (1932), p. 5.
[18]Idem. Il s'agit plus exactement de W. v. IGNATOWSKY, *Der Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik*, Teubner, Berlin, 1921.

Von Ignatowsky s'inscrit dans cette lignée alors minoritaire mais néanmoins extrêmement productive à laquelle on peut rattacher les noms de Cartan, de Schouten[19], de Struik[20], mais également de Silberstein, tous étant mathématiquement mobilisés par la théorie de la relativité générale et par ses développements. La même année que la *Vektoranalysis*, paraissaient les *Éléments d'algèbre vectorielle*[21] dont les attendus convergeaient parfaitement :

≪[...] moyennant une généralisation des règles de l'Algèbre et de l'Analyse ordinaires, on peut construire un nouveau Calcul, permettant d'opérer directement sur les vecteurs. Ce calcul, peu compliqué, possède, par réciprocité, les avantages suivants :

1°. Il n'exige pas la décomposition des vecteurs donnés suivant des axes de coordonnées.

2°. Les lois ou théorèmes se traduisent par une seule équation au lieu de trois.

3°. On opère directement sur les grandeurs vectorielles, ce qui permet à la pensée de conserver l'image des grandeurs physiques sur lesquelles elle travaille.

4°. Les équations ne sont rattachées à aucun système d'axes particulier≫[22].

Voilà pour ≪l'intrinséquisme≫.

≪Une autre particularité bien frappante du Calcul vectoriel est la façon dont il manie ce qu'on appelle les opérateurs. Ce sont des symboles qui désignent des transformations à effectuer sur les grandeurs (vectorielles ou non) auxquelles on les associe. On rencontre, dans cet Ouvrage, deux classes principales d'opérateurs : les opérateurs vectoriels linéaires et les opérateurs différentiels ; le principal représentant de ces derniers est l'Hamiltonien. On associe ces opérateurs aux vecteurs, ou bien même on les combine entre eux comme des sortes de grandeurs vectorielles obéissant parfois à des lois spéciales. Ce procédé est hautement synthétique. Ici plus qu'ailleurs, s'applique le mot de Mach : "La Science a pour but l'économie de pensée". [...] Le calcul des "opérateurs" est une branche du Calcul fonctionnel≫[23].

Il est enfin à noter que Silberstein est également l'auteur d'un ouvrage relativiste lui aussi absolument anticipateur[24]. La singularité de cette approche tient

---

[19] Pour une extension géométrique des considérations purement analytiques de Jan Arnoldus SCHOUTEN,≪Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können≫, *Mathematische Zeitschrift*, t. XIII, 1922, cf. Gustave JUVET, [m].

[20] Juvet est l'auteur d'un compte-rendu de Dirk Jan STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differenzialgeometrie in direkter Darstellung*, Springer, Berlin, 1922, in *L'Enseignement Mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1922 p. 395-396.

[21] Ludwick SILBERSTEIN, *Éléments d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle*, Gauthier-Villars, Paris, 1921, traduit de l'anglais par George Matisse.

[22] *Ibid.*, Préface de Georges Matisse, p. VII. Voir également, de Georges MATISSE, *Le mouvement scientifique contemporain en France. Les sciences physico-chimiques et mathématiques*, Collection Payot, Paris, 1925, plus particulièrement sur l'analyse fonctionnelle d'Hadamard et les invariants intégraux de Cartan, p. 295-318.

[23] *Ibidem*, p. VIII.

[24] Ludwick SILBERSTEIN, *The Theory of Relativity*, Mac Millan, London, 1914. Il faut y ajouter, *The Theory of General Relativity and Gravitation*, New York, 1922.

dans sa compactification des équations de Maxwell en une unique équation utilisant des vecteurs complexes ainsi que des quaternions complexes[25]. Voilà pour la dimension *opératorielle* et *compactifiante*.

2.2. Autour de Kaluza-Klein (1927–1930)

Qui voudrait jeter un œil, même ≪distrait≫, aux théories physico-mathématiques les plus actuelles ne manquerait pas de tomber sur des champs thématiques impliquant ce que les physiciens appellent : les ≪théories pentadimensionnelles de Kaluza-Klein≫. De la topologie de Yang-Mills en théorie quantique des champs aux théories des ≪super-cordes≫, en passant par les théories de jauge ou par la théorie des ≪fermions dynamiques de Kaluza-Klein en dimensions supplémentaires≫, les physiciens ont appliqué à nouveaux frais les principes de cette théorie. Cette double signature renvoie à une théorie proposée dès 1919 par les deux physiciens pour un problème non résolu par Einstein lui-même. Alors que les équations de la relativité générale telle que formulée par Einstein donnaient une description géométrique de la gravitation, elles ne parvenaient pas à fournir une description géométrique pour l'électromagnétisme. Dès cette date, Hermann Weyl avait modifié le cadre géométrique de la relativité générale pour y inclure l'électromagnétisme. Sur l'espace riemannien utilisé en relativité générale, le transport parallèle d'un vecteur autour d'un chemin fermé provoque parfois une rotation par rapport à sa position initiale. Cette rotation est liée à la courbure qui, au niveau physique, traduit la présence d'un champ de gravitation. Par contre, ce transport n'affecte en aucune manière la longueur du vecteur. La relativité générale suppose donc implicitement l'existence d'un ≪étalon de longueur≫ utilisable sur tout l'espace-temps. L'idée de Weyl[26] est alors d'admettre une variation de longueur d'un vecteur lors d'un transport parallèle sur un chemin fermé. Cette variation pourrait manifester l'existence d'un champ physique, électromagnétique par exemple. Puisqu'on ne peut plus définir un ≪étalon de longueur≫ commun à tous les points de l'espace-temps, on est amené à introduire pour chaque point une unité de longueur spécifique appelée *jauge*. Le point remarquable de la théorie de Weyl est que l'expression des forces électriques et magnétiques ne dépend pas du choix du système de jauge sur l'espace-temps. De plus, l'invariance de la théorie sous une transformation de jauge conduit à la conservation de la charge électrique. Cela dit, ces théories restent quelque peu décevantes car elles dérivent les équations de la gravitation d'Einstein et les équations de Maxwell sans fournir de prédictions expérimentales nouvelles. Kaluza et Klein vont unifier l'électromagnétisme en ajoutant une cinquième dimension à l'espace-temps. Cette théorie annonce ainsi la théorie moderne de jauge de l'électromagnétisme, la cinquième dimension préfigurant l'introduction par les théories plus récentes d'un ≪espace interne≫ associé à l'espace-temps et sur lequel les transformations de

---

[25] Pertii LOUNESTO le cite encore à ce titre en 1997 in *Clifford Algebra and Spinors*, *op. cit.* p. 114 et 134.

[26] Hermann WEYL, ≪Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie≫, *Ann. Physik*, 59 (1919) 101, 65 (1921) 541.

jauge devront agir[27]. Pour décrire les interactions physiques il fallait donc d'abord une structure géométrique localement isomorphe au produit cartésien d'un ouvert de l'espace-temps et d'un ≪espace interne≫ (un groupe par exemple). C'est cette structure mathématique, implicite dans les travaux de Cartan, qui est celle du ≪fibré≫. Les théories unitaires de Kaluza-Klein sont donc des extensions de la relativité générale guidées par le désir de redériver, en un formalisme cohérent et géométrique, les équations d'Einstein et de Maxwell. C'est cette voie que, durant l'été 1927, Juvet va entreprendre. Avec son ami Ferdinand Gonseth, ils va formuler une théorie de la relativité dans un espace à cinq dimensions à connexion affine[28]. Ce qui qualifie plus particulièrement cette audacieuse tentative de condenser les équations de la gravifique, du champ électromagnétique et les lois du mouvement du point matériel électriquement chargé, c'est l'apparition dans ces notes d'équations semblables à celles que Schrödinger venait de mettre au fondement de la mécanique ondulatoire :

> ≪On voit ainsi que la fiction d'un univers à cinq dimensions permet de donner une raison profonde à l'équation de M. Schrödinger. Il est clair que cet artifice deviendrait nécessaire si quelque phénomène obligeait les physiciens à croire à la variabilité de la charge≫[29].

L'idée qui préside alors à la recherche de Juvet et de Gonseth, c'est qu'il faut former une équation aux dérivées partielles du second ordre, régissant une propagation d'ondes et analogue à celle de Schrödinger. L'équation de Jacobi donnerait les caractéristiques de cette équation de second ordre et les bi-caractéristiques fourniraient la trajectoire du point matériel. L'espace est un espace à 5 dimensions dont le ds^2 contient à la fois les potentiels de gravitation et les potentiels électromagnétiques.

Dans une lettre envoyée le 8 août 1938 à son ami suisse Michele Besso, Einstein écrit[30] :

> ≪Sur le plan scientifique, je traverse une période très intéressante. Tu sais bien que je n'ai jamais cru en des fondements essentiellement statistiques de la physique, malgré les succès de la théorie des quanta. Or voilà que j'ai trouvé cette année, après vingt ans de vaines recherches, une théorie prometteuse du champ, qui est la suite naturelle de la théorie relativiste de la gravitation. Elle s'inscrit dans la ligne des idées de Kaluza sur la nature du champ électrique. Lorsque cette étude sera imprimée, je te l'enverrai≫[31].

---

[27] Cf. sur cette aporie, [u], *Sur la métrique de l'espace à 5 dimensions de l'électromagnétisme et de la gravitation* (Séance du 1er août 1927), p. 412 : ≪La connexion ainsi déterminée possède un groupe fondamental à 15 paramètres, qui est celui de Lorentz≫.

[28] Cf. le point 2. de la bibliographie.

[29] [u], *Sur l'équation de Schrödinger* (Séance du 8 août 1927), p. 450.

[30] Albert EINSTEIN, Michele BESSO, *Correspondance 1903-1955*, traduction, notes et introduction de Pierre SPEZIALI, Hermann, ≪Collection Histoire de la pensée≫, Paris, 1972. *Lettre 126*. I, p. 323

[31] Rappelons par ailleurs qu'en 1925, Einstein déclarait au même Besso : ≪Je suis fermement convaincu que toute la chaîne Weyl-Eddington-Schouten ne conduit à rien d'utile en physique≫, *ibid.*, p. 204, *Lettre 74* (E. 52).

Einstein publiera sa généralisation de la théorie de Kaluza cette même année, sous le titre : *Generalisation of Kaluza's theory of electricity* (avec P. Bergmann)[32]. Mais le plus intéressant pour nous tient dans la note du curateur, Pierre Speziali :

≪Signalons que dix années plus tôt, en 1928, F. Gonseth et G. Juvet avaient publié dans les *Helvetica Physica Acta*, I, 6, 421-436, un article *Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger*, dans lequel ils montrent comment ils ont retrouvé, par une autre voie, plusieurs résultats de Kaluza relatifs aux équations de Maxwell. Besso avait reçu de Gonseth un tiré à part de ce travail, et il est surprenant qu'il n'ait pas fait mention, à ce moment-là, de son contenu à Einstein (à moins que cela ne figure dans une lettre disparue≫[33].

2.3. Autour de Clifford (1930–1936)

De même qu'il existe plusieurs lignées théoriques dans l'arbre généalogique du calcul vectoriel et de ses extensions tensorielles, il y a plusieurs histoires dans la constitution de la théorie des spineurs[34]. On sait qu'une des racines historiques de la théorie spinorielle remonte aux travaux de P. A. M. Dirac. À la fin des années vingt, les physiciens qui tentaient de trouver une théorie quantique relativiste, étaient parvenus à écrire une équation invariante sous le groupe de Lorentz : l'équation de Klein-Gordon. Cette équation aux dérivées partielles du second ordre, obtenue à partir de la conservation relativiste de l'énergie-impulsion, est l'analogue de l'équation de Schrödinger en mécanique quantique non-relativiste. En 1928, Dirac[35] découvre une équation d'onde du type $D\Psi = \lambda\Psi$ (D est ici un opérateur différentiel du premier ordre par rapport à t) compatible avec l'équation de Klein-Gordon :

$$\Box\varphi = \mu\varphi \quad \text{où} \quad \Box = (\partial/\partial t)^2 - (\partial/\partial x)^2 - (\partial/\partial y)^2 - (\partial/\partial z)^2. \tag{1}$$

La fonction d'onde Ψ n'est plus une fonction scalaire à valeurs dans le corps des complexes, mais un n-uple : $(\Psi_1, ..., \Psi_n)$ de telles fonctions. L'opérateur D s'écrit sous la forme :

$$D = \gamma_0\partial/\partial x_0 + \gamma_1\partial/\partial x_1 + \gamma_2\partial/\partial x_2 + \gamma_3\partial/\partial x_3. \tag{2}$$

Les symboles $\gamma_0, ..., \gamma_3$ désignent des matrices $n \times n$ à éléments complexes telles que :

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = \pm 2\,\delta_{ij}\,\mathbb{I}, \tag{3}$$

---

[32] *Annals of Mathematics*, 39 (1938), p. 683-701.

[33] Albert EINSTEIN, Michele BESSO, *op. cit.*, p. 323, note 1. Il est par ailleurs question de Gonseth dans les lettres 75, 77, 168, 179, 193, entre 1925 et 1952.

[34] Pour une reconstruction détaillée et pertinente de cette histoire, cf. Dominique LAMBERT, *Recherche sur la structure et l'efficacité des interactions récentes entre mathématiques et physique*, Thèse, Louvain-la-Neuve, 1995-1996, p. 30-40.

[35] P. A. M. DIRAC, ≪L'équation d'onde relativiste de l'électron≫, in *Sources et évolution de la physique quantique. Textes fondateurs* [L. LEITE LOPES, B. ESCOUBÈS. Préface de J.-M. Lévy-Leblond], Masson, Paris, 1995, p. 194-208.

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et où $\mathbb{I}$ désigne la matrice unité $n \times n$. À l'époque où Dirac écrivait son équation, les physiciens construisaient explicitement des matrices γ_j pour des valeurs petites de n. Cependant, aucune structure algébrique générale sous-jacente à ces matrices ne fut dégagée à cette époque. Pourtant, dès 1927, Pauli décrivant les phénomènes magnétiques liés aux électrons, avait introduit des matrices σ_1, σ_2 et σ_3 vérifiant les relations suivantes :

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\, \delta_{ij}\, \mathbb{I}. \tag{4}$$

Il faudra attendre jusqu'en 1935 pour voir se développer un cadre théorique général dans lequel Hermann Weyl et Richard Brauer[36], cette année-là, présentent une construction explicite des spineurs à partir des algèbres de Clifford. Ainsi, les travaux visant à comprendre l'équation de Dirac vont stimuler des recherches, tant sur la théorie des groupes que sur les algèbres de Clifford. Les *Leçons sur la théorie des spineurs* d'Élie Cartan témoignent de l'effet catalyseur joué par cette équation dans le milieu des mathématiciens :

≪Ce sont les physiciens qui ont introduit en Mécanique quantique ce qu'on appelle maintenant les spineurs. Sous leur forme mathématique la plus générale, les spineurs ont été découverts par l'auteur de cet Ouvrage en 1913 dans ses recherches sur les représentations linéaires des groupes simples [...]. Les spineurs de l'espace à quatre dimensions figurent dans les célèbres équations de l'électron de Dirac, les quatre fonctions d'onde n'étant autres que les composantes d'un spineur. De très nombreux mémoires ont été publiés sur les spineurs en général [Weyl, Brauer, Veblen]. Mais dans presque tous ces travaux les spineurs sont introduits d'une manière purement formelle sans signification géométrique intuitive ; c'est d'ailleurs cette absence de sens géométrique qui a rendu si compliquées les tentatives pour étendre à la relativité générale les équations de Dirac. L'un des buts principaux de cet Ouvrage est de développer systématiquement la théorie des spineurs en donnant de ces êtres mathématiques une définition purement géométrique : grâce à cette origine géométrique, les matrices qu'utilisent les physiciens en Mécanique quantique se présentent d'elles-mêmes et on saisit l'origine profonde de la propriété que possèdent les nombres hypercomplexes de Clifford-Lipschitz de représenter les rotations dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Enfin cette origine géométrique rend très facile l'introduction des spineurs en géométrie riemannienne et spécialement l'application à ces êtres géométriques de la notion de transport parallèle≫[37].

---

[36] Richard BRAUER, Hermann WEYL, ≪Spinors in n dimensions≫, *Am. J. Math.*, 57 (1935), p. 425-449.

[37] Élie CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs. I. Les spineurs de l'espace à trois dimensions* (D'après des notes recueillies et rédigées par André Mercier), ASI 643, ≪Exposés de géométrie≫, Hermann, Paris, 1938, p. 3-4. À noter que dès 1904, un article de Study traduit par Cartan donnait une classification des algèbres de Clifford (appelées comme ici ≪systèmes de Clifford-Lipschitz≫) sur le corps des réels, associées à des formes quadratiques de signature quelconque. Élie Cartan, ≪Nombres complexes≫. Exposé d'après l'article allemand de Study in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome 1, *Arithmétique*, Gauthier-Villars, Paris, 1904, p. 463-466.

Ce sont ces *Leçons* qui vont amener les mathématiciens à entrevoir d'autres définitions possibles du concept de spineur. Si l'idée primitive était de considérer le spineur en tant qu'objet sur lequel agit une représentation d'un groupe, celle-ci étant obtenue à partir d'une algèbre de Clifford, ce n'est qu'en 1954 que Claude Chevalley montrera qu'un spineur peut être défini en tant qu'élément d'un idéal à gauche d'une algèbre de Clifford[38]. Le spineur peut dès lors être caractérisé de manière purement algébrique, ce qui permet de retrouver ses racines Cliffordiennes. Une chose en tout cas semble sûre, c'est qu'il existe au moins deux histoires de la théorie des spineurs, celles des physiciens et celle des mathématiciens, deux histoires à la fois corrélées et autonomes, et dont on a pu dire que, telle une architecture babélique, s'y jouait ≪The confusion of Tongues≫[39].

De 1930 jusqu'à sa mort prématurée en 1936, Gustave Juvet introduit les nombres de Clifford dans plusieurs questions de géométrie, d'électromagnétisme et de mécanique quantique. Le rôle de ces nombres hypercomplexes est de faire tenir en quelques formules des relations qui, sans eux, paraissent désunies. Alexandre Proca les avait introduits dans la théorie de Dirac[40]. Juvet les applique aux équations de Maxwell et met ces dernières sous une forme élégante qui manifeste immédiatement leur invariance vis-à-vis de la transformation de Lorentz :

> ≪M. A. Proca, en utilisant la représentation par les nombres hypercomplexes, a proposé, dans une généralisation hardie et élégante, de remplacer la fonction des ondes par un nombre hypercomplexe et il a obtenu, pour les équations de Dirac, un système de 16 équations aux dérivées partielles du premier ordre dont on peut espérer tirer un heureux parti pour la dynamique de l'électron. [...] Nous verrons que si l'on utilise non pas les quaternions comme système de nombres hypercomplexes, mais bien un autre système, celui-là même qu'a employé M. Proca, on est conduit à une formulation très simple des équations de Maxwell≫[41].

Dans cette recherche d'une expression cliffordienne de l'électromagnétisme, Juvet s'associera en 1932 avec Arthur Schidlof pour rédiger un long article de synthèse, intitulé *Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications à l'analyse vectorielle ordinaire, à l'électromagnétisme de Minkowski et à la théorie de Dirac*[42]. C'est André Mercier, le futur compilateur des *Leçons* de Cartan consacrées aux spineurs, qui va se lancer sur leurs traces et perfectionner

[38] Claude CHEVALLEY, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, Columbia, 1954.
[39] Ian M. BENN, Robin W. TUCKER, *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Adam Hilger, Philadelphia, 1987, Ch. 2.8, p. 85-86.
[40] Alexandre PROCA, ≪Sur l'équation de Dirac≫, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (CRAS), 190, 16 juin 1930, p. 1377 ; ≪Sur l'équation de Dirac. Les 16 composantes≫, CRAS, 191, 30 juin 1930, p. 26 ; ≪Sur l'équation de Dirac≫, *Journal de Physique* (VII), T. I, juillet 1930, p. 235-248. Ces trois articles sont référés par Juvet dans [Cl1], p. 226, note 4. On trouve désormais tous les textes de Proca in *Alexandre Proca (1897-1955). (Œuvre scientifique publiée)*, Georges A. Proca, Paris, 1988, B.II.1, B.II.2, B.II.3.
[41] Cf. Gustave JUVET, [Cl1], p. 226-227.
[42] Cf. [Cl3].

encore l'analyse cliffordienne à laquelle Juvet avait donné une si vigoureuse impulsion[43]. Enfin, le dernier mémoire de Juvet, mémoire posthume, traite par les nombres de Clifford des rotations dans l'espace à n dimensions [Cl4.]. Il étudie par ce moyen le groupe des rotations et sa structure. Il approfondit ainsi une de ces *structures de groupe* auxquelles il devait, dans ses méditations philosophiques, accorder une telle importance.

3. La Philosophie Symplectique de Gustave Juvet : Un Surrationalisme des Structures

≪La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire≫.

Jacques HADAMARD, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, New York, 1945[44].

≪La simplicité n'a pas besoin d'être simple, mais du complexe resserré et synthétisé≫.

Alfred JARRY, *Les Minutes de Sable mémorial*, Fasquelle Ed., Paris, 1932, p. 8.

≪Une grande réalisation scientifique n'est de nouveau possible que si, les temps ayant changé, un matériau nouveau est offert à la pensée humaine ; il faut que le four de fusion des processus historiques libère un matériau nouveau épuré, qui attend dès lors la cristallisation qui établira pour toujours sa forme future≫.

Werner HEISENBERG, *Philosophie. Manuscrit de 1942*, ≪Sources du savoir≫, Seuil, Paris, 1998, p. 367-368.

≪Il faut forcer la nature à aller aussi loin que notre esprit≫.

Gaston BACHELARD, La philosophie du non, PUF, Paris, 1940, p. 36.

Par son travail de mathématicien directement stimulé par la double révolution scientifique de son siècle et par sa connexion directe aux travaux révolutionnaires de Clifford, Gustave Juvet s'est ouvertement et anticipativement inscrit dans le sillon décrit par John Archibald Wheeler :

---

[43] André MERCIER, *Expression des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford*, Thèse, Université de Genève, 1935 ; voir également, ≪Matrices pouvant servir d'unités pour les nombres de Clifford≫, *L'Enseignement mathématique*, Vol. 36, 1937, p. 389-390. Pertii LOUNESTO, *Clifford Algebras and Spinors*, *op. cit.*, p. 115 va ainsi les associer : ≪*The Maxwell equations have been condensed into a single equation using [...] Clifford algebras* (Juvet & Schidlof 1932, Mercier 1935)≫ aux côtés de M. Riesz.

[44] Traduction française de Jacqueline Hadamard, Gauthier-Villars, ≪Discours de la méthode≫, Paris, 1959, p. 114. À noter que ≪domaine réel≫ et ≪domaine imaginaire≫ sont pris en leur sens mathématique strict, l'un désignant le corps des réels et l'autre le corps des complexes.

≪The vision of Clifford and Einstein can be summarized in a single phrase, "a geometro-dynamical universe" : a world whose properties are described by geometry, and a geometry whose curvature changes with time - *a dynamical geometry*≫[45]

Au-delà de cette vision, l'inscription de ses travaux dans un tel programme de géométrisation de la physique vient s'accorder avec le courant encore plus contemporain de *symplectification* :

≪La géométrie symplectique ressemble, au départ, beaucoup à la géométrie euclidienne : on considère une variété X, munie d'un champ de tenseurs σ_{jk} (σ va remplacer le tenseur métrique g), supposé inversible ($\det(\sigma_{jk}) \neq 0$) et plat (il existe un atlas de X où les σ_{jk} sont des constantes) ; mais on remplace la condition de symétrie $g_{kj} = g_{jk}$ par la condition d'antisymétrie $\sigma_{kj} = -\sigma_{jk}$. On peut démontrer que ces conditions ne sont possibles que si la dimension de la variété X est un nombre pair. La structure symplectique a été découverte en 1811 par Joseph-Louis de Lagrange ; les composantes covariantes et contravariantes du tenseur σ sont les "crochets" et "parenthèses" de Lagrange. Leur découverte est le résultat d'une investigation profonde des équations de la mécanique. La variété à laquelle Lagrange donne une structure symplectique est l'ensemble des solutions des équations du mouvement d'un système dynamique - nous dirons simplement l'espace des mouvements. Cette théorie, développée dans la "Mécanique Analytique", œuvre classique par excellence, n'a pourtant pas été réellement comprise par les contemporains et les épigones de Lagrange. Poisson, Hamilton, par exemple, ne l'ont transmise que sous forme tronquée ; la structure symplectique est définie sur l'"espace de phases" ; choix désastreux qui fait disparaître à la fois les propriétés globales et les propriétés relativistes de la mécanique. Un siècle plus tard, complétant les travaux de Henri Poincaré sur les "invariants intégraux", Élie Cartan réinvente la forme symplectique ("invariant intégral absolu") ; les vraies dimensions de l'œuvre de Lagrange réapparaissent progressivement. Sous son aspect géométrique actuel, la théorie n'a guère été développée avant les années 1950≫[46].

Nous avons entrevu plus haut combien Juvet était actif dans le champ : de son *Compte rendu à l'Académie* en 1923 [j] à sa Thèse d'État dirigée par Cartan en 1926 [o], en passant par son ouvrage, publié la même année, sur *Mécanique analytique et théorie des quanta* [n], notre auteur se sera singulièrement enfoncé dans cette voie symplectique.

Dès lors, on pourra s'attendre à une proximité, si ce n'est ≪un parallélisme≫ presque parfait avec la situation philosophique de Clifford :

---

[45] John A. WHEELER, ≪Curved empty space-time as the building material of the physical world≫, in E. NAGEL, P. SUPPES and A. TARSKI [eds.], *Logic, Methodology and the Philosophy of Science*, Stanford University Press, Stanford, 1962, p. 361-374. Sur la filiation Clifford-Einstein-Wheeler, cf. Luciano BOI, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer, Berlin, 1995, p. 457-484.

[46] Jean-Marie SOURIAU, ≪Physique et géométrie≫, in [Simon DINER, Daniel FARGUE, Georges LOCHAK éd.], *La pensée physique contemporaine. Science et humanisme en notre temps*, ≪Fondation Louis de Broglie≫, éditions Augustin Fresnel, Hiersac, p. 352-353. Sur cette séquence historique, de Lagrange à Cartan, en passant par les approches singulières d'Appel puis d'Eugène et François Cosserat, cf. Georges MATISSE, *op. cit.* (*supra* note 22), p. 227 sq.

≪Contrairement à ce qu'on fait trop souvent, nous n'avons pas voulu, dans cette réflexion, séparer complètement l'œuvre scientifique de Clifford de son œuvre philosophique. À notre sens, un penseur ne peut mener une réflexion aussi puissante dans un domaine comme les mathématiques sans que les résultats de son travail ne façonnent son esprit d'une manière telle qu'elle ait des retentissements dans les autres parties de son œuvre≫[47].

Mais il nous faut d'abord relever, parallèlement à l'oubli relatif des scientifiques, une désaffection incontestable de Juvet philosophe. Pourtant on se doit d'affirmer qu'il fut tout sauf ignoré par ceux qui - dans le champ d'une philosophie qui était au plus près des sciences les plus avancées de leur temps - ont le plus compté au cours du siècle dernier. Il suffirait d'en citer deux : Gaston Bachelard (1884-1962) et Albert Lautman (1908-1944)[48]. On ne trouve pas moins de dix références chez l'auteur du *Nouvel esprit scientifique* [1934], et une présence tout aussi décisive chez l'auteur de *Schémas de genèse* [1938][49]. Mais nous verrons que la liste de ses interlocuteurs effectifs s'avère beaucoup plus large. Dans l'unique texte qui, à ma connaissance, soit explicitement consacré à la philosophie de Gustave Juvet, Jean Piaget distingue trois phases successives[50] :

1°. Bien avant ses études proprement universitaires, Juvet pourchassait tout mysticisme en cherchant l'absolu sur le terrain d'un monisme intégral. Suivant les traces de Félix Le Dantec, son premier maître et son premier modèle[51], il présentait des travaux devant son petit groupe de ≪gymnasiens≫ neuchâtelois qui

[47] Daniel PAROCCHIA, ≪William Kingdon Clifford. Mathématicien et philosophe≫, ici même. Voir en particulier son très bel exposé sur l'idée d'un parallélisme généralisé philosophiquement étendu chez Clifford, *passim.*

[48] Sur ces deux auteurs et sur leurs options ≪surrationalistes≫, cf. Charles ALUNNI, ≪L'École de l'ETH dans l'œuvre de Gaston Bachelard. Les figures spectrales d'Hermann Weyl, Wolfgang Pauli et Gustave Juvet≫, in [éd. Charles ALUNNI & Éric BRIAN], *Revue de synthèse*, 5e série, 2005/2, p. 367-389 ; Charles ALUNNI, ≪Albert Lautman et le souci brisé du mouvement≫, *ibid.*, p. 283-301. Pour l'héritage deleuzien, cf. Charles ALUNNI, ≪Continental genealogies. Mathematical confrontations in Albert Lautman and Gaston Bachelard≫, in *Virtual Mathematics. The logic of difference* [Simon DUFFY ed.], Clinamen Press, Manchester, 2006, p. 65-99.

[49] Cf. Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, PUF, Paris, 1968, p. 29, 32, 34, 35, 96 (réf. à sa traduction de Jeans), 175, 178 ; Albert LAUTMAN, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, in *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, UGE, ≪10/18≫, Paris, 1977, p. 147 et note 62 p. 151.

[50] Jean PIAGET, ≪La philosophie de Gustave Juvet≫, in *À la mémoire de Gustave Juvet 1896-1936*, *op.cit.*, p. 37-52.

[51] Biologiste français né en 1869, mort en 1917. Fils de médecin, il fut admis à 16 ans à l'École Normale Supérieure. Sa vocation l'entraîna vers les sciences objectives. Il fut chargé de professer à Dijon ; il alla peu de temps après au Brésil où il fonda un institut Pasteur. De retour, il professa à Lyon, puis à Paris, où une chaire d'embryologie générale fut créée pour lui. Tout son système biologique et philosophique est basé sur la loi d'assimilation fonctionnelle ; tout être vivant est le produit de son hérédité et de son éducation. Ce qui se transmet de génération en génération ce sont des propriétés, des aptitudes et non des caractères, ces derniers, sous l'influence du milieu où l'on vit et de l'éducation, évoluent et modifient le patrimoine héréditaire.

allaient du lamarckisme et de l'embryologie causale jusqu'aux théories atomiques et thermo-dynamiques en passant par les mathématiques pures :

≪Je me rappellerai toujours une après-midi qu'il m'avait consacrée [...], au moment de sa licence, pour m'exposer "en français", c'est-à-dire sans formules, la relativité restreinte en un raccourci étonnant, et d'une clarté telle que je n'ai rien lu depuis sur ce sujet qui l'égalât. Et cependant, il considérait alors cette doctrine comme fausse et se proposait de la combattre !≫[52].

2°. Vers 1918-1919, Juvet commence à abandonner ces premiers points de vue et à douter de son monisme bio-chimique. Se laissant gagner par la relativité einsteinienne, il se demande comment expliquer la rencontre entre les géométries non-euclidiennes construites au siècle précédent, sans aucun souci d'application et par pur besoin déductif, et l'expérience physique dans ce qu'elle a de plus raffiné. C'est alors pour lui la question du mystère posé par un esprit adapté au réel au point d'en découvrir ainsi les cadres par avance grâce à une sorte de divination rationnelle. Son premier cadre de pensée est dès lors incapable de rendre compte de cette puissance créatrice de la théorie et de ses connexions progressives avec le réel :

≪Les principes sont en nous, disait-il volontiers, et il n'est pas douteux que notre activité déductive soit nécessaire pour organiser la science, mais les principes ne viennent pas de nous et ils sont à prendre pour ce qu'ils sont : des règles conformes à la raison et applicables à l'expérience≫[53].

Bien que gardant les formes de sa première philosophie, Juvet était visiblement séduit par ce platonisme éternel qui guette tout mathématicien trop réaliste pour se fier à la psychologie ; si la science atteint si bien son objet, n'est-ce pas peut-être que la réalité profonde consiste en êtres mathématiques et esthétiques dont nous avons, sinon l'intuition directe, du moins le soupçon. Cette période transitoire le conduit à trouver en Duhem un point de référence[54]. Comme le célèbre auteur de *La théorie physique*, Juvet pensait alors qu'on peut être à la fois rigoureusement *nominaliste* quant à la théorie des sciences (la science est un système de déductions traduisant avec plus ou moins de simplicité les données de l'expérience, mais sans qu'aucune expérience cruciale ne puisse jamais décider de la valeur dernière des principes admis), et *réaliste* en philosophie. Mais en place

[52] Jean PIAGET, op. cit., p. 38.

[53] *Ibid.* p. 40.

[54] Pierre Maurice Marie Duhem (1861-1916) était un chimiste et philosophe des sciences français. Opposé à toute interprétation matérialiste et réaliste de la chimie et de la physique, Duhem proposa dans *La Théorie physique. Son objet et sa structure* (1906), une conception de la science qu'on qualifiera par la suite d'≪instrumentaliste≫. Selon l'instrumentalisme, la science ne décrit pas la réalité au-delà des phénomènes mais n'est qu'un instrument (le plus commode) de prédiction. Il rejetait l'atomisme et l'interprétation réaliste de la mécanique statistique ou de la thermodynamique au profit de ≪l'énergétisme≫ de Wilhelm Ostwald. Il prit parti pour Ernst Mach et Josiah Willard Gibbs contre l'atomisme de Ludwig Boltzmann.

du réalisme aristotélicien qui satisfaisait Duhem, Juvet rêvait d'un monde d'Idées permanentes, source de toute réalité régionale[55].

3^o. Cette deuxième phase (1918-1923) va déboucher sur un troisième moment caractérisant sa philosophie la plus personnelle. Du point de vue de l'évolution de la physique, l'idée que la science se réduirait à un simple langage lui semble désormais démentie par le fait des approximations successives dont la vection témoigne d'une objectivité croissante. Ce recentrement sur l'idée d'une ≪connaissance approchée≫ et sur la nouvelle construction d'objets imposée par la théorie de la relativité et par la mécanique quantique l'éloigne définitivement du positivisme nominaliste de Duhem pour le rapprocher des positions bachelardiennes et lautmaniennes[56] :

> ≪Si l'histoire des sciences prouve qu'il n'y a pas de faits bruts, d'expériences pures, de mesures cruciales, parce que tout fait, toute expérience, toute mesure supposent une certaine théorie préalable [...] cette même histoire montre que c'est par une nouvelle interprétation d'expériences anciennes, ou après avoir essayé infructueusement d'interpréter une nouvelle expérience dans une ancienne théorie, que les mythes de la physique se transforment≫[57].

C'est donc à la suite de la nouvelle mathématisation de la physique, où il a joué un rôle important, et de ses réflexions profondes sur les travaux de géométrie différentielle d'Élie Cartan que Juvet va trouver l'idée maîtresse qui gouvernera sa grande synthèse philosophique : *la structure de groupe*. Nous verrons en quoi les ≪groupes≫ constituent pour lui à la fois *le fondement des mathématiques* et *celui de la réalité physique*. La réalité dernière serait ainsi à chercher dans un monde d'êtres mathématiques d'où procèdent simultanément notre esprit et le monde extérieur, et la nature de ces êtres trouverait son interprétation dans une sorte de réalisme platonicien, mais un réalisme remplaçant l'Idée statique ou la Forme par la *géométro-dynamique du Groupe*. Ici, *réalisme* doit être entendu au sens bachelardien de ≪*réalisme travaillé*≫[58] : ≪Le réel n'est jamais "ce qu'on pourrait croire", mais il est toujours ce qu'on aurait dû penser≫[59]. Si pour Juvet

---

[55] Sur sa critique de Duhem, cf. [ϕ_6], p. 34.

[56] En particulier du Bachelard ≪riemannien≫ de l'*Essai sur la connaissance approchée*, Vrin, Paris, 1928. Ainsi, ≪On oublie que la science déplace sans cesse ses points de vue, et les résultats qu'elle obtient sont des approximations ; une approximation en suit une autre≫, [ϕ_6], p. 8.

[57] [ϕ_6], p. 172.

[58] Gaston BACHELARD, *Le rationalisme appliqué* [1949], PUF, Paris, 1966, p. 130 ; *L'activité rationaliste dans la physique contemporaine* [1951], PUF, Paris, 1965, p. 89. Pour une analyse de sa critique radicale du réalisme chosiste, cf. Charles ALUNNI, ≪Relativités et puissances spectrales chez Gaston Bachelard≫, in [dir. C. ALUNNI] *Revue de synthèse*, 4e Série, n^o 1, janv.-mars 1999, ≪Pensée des sciences≫, Albin Michel, Paris, 2000, p. 73-110. Voir également la figure du ≪Réaliste≫ in Gaston BACHELARD, *L'expérience de l'espace dans la physique contemporaine*, Librairie Félix Alcan, ≪Bibliothèque de philosophie contemporaine≫, Paris, 1937, ch. I, ≪Réalisme et localisation≫, p. 1-30.

[59] Gaston BACHELARD, *La formation de l'esprit scientifique* [1938], PUF, Paris, 1977, p. 13.

la physique ne saurait demeurer positiviste, elle ne peut pas plus être conçue comme rejoignant des objets existant en eux-mêmes :

≪La réalité physique a perdu son sens étymologique ; la science n'atteint pas des choses ; l'analyse des phénomènes est infiniment plus subtile. [...] le corpuscule n'est plus une chose qu'on localise dans l'espace et dans le temps, ou si l'on préfère, la notion de chose a pris un autre aspect≫[60].

Nous verrons plus loin ce qui relie cet *anti-chosisme* à une philosophie de l'*acte*, des *relations*, des *structures* où *une certaine nouménologie vise à neutraliser toute tendance substantialiste*. Quant au ≪platonisme≫ déclaré de Juvet, il est solidaire d'un certain *mathématisme* où, selon Lautréamont, ≪les mathématiques sont plus anciennes que le soleil≫ et demeurent intactes ≪par-dessus les ruines du temps≫. C'est ce lieu maldororien de mathématiques sévères révélatrices d'une ≪vérité suprême≫ qui constitue le véritable site où s'enracine la pensée de Juvet. On peut dès lors la rattacher à ce qu'Alain Badiou appelle ≪le grand style en philosophie≫, où ≪*mathematics teaches us about what must be said concerning what is ; and not about what is permissible to say concerning what we think there is*≫[61].

C'est évidemment cette ≪troisième philosophie≫ qui va maintenant retenir notre attention, son dispositif dévoilant ses connexions les plus profondes avec la pensée cliffordienne.

≪La troisième philosophie de Juvet est donc un mathématisme intégral, ne reculant devant aucun des problèmes qu'il soulève, mais un mathématisme combien vivant et combien "fastueux" (pour se servir d'une expression qu'il aimait)≫[62].

Mathématisme, mais encore ? C'est précisément autour de la convocation de [ϕ_6] que le philosophe et logicien Robert Blanché (1898-1975) précise le syntagme :

≪Dans [la physique contemporaine] la mathématique n'apparaît plus comme un simple instrument au service de la science expérimentale : c'est bien plutôt la science expérimentale qui deviendrait l'instrument, d'ailleurs indispensable, au service de la théorie. Il n'y a pas très longtemps qu'un physicien de l'espèce pourtant des théoriciens, s'amusait à soutenir qu'une section de mathématiques n'était pas à sa place dans une Académie des Sciences. Le mathématicien prend aujourd'hui sa revanche : il constate que la physique devient trop difficile pour les physiciens. [Note. La première de ces boutades est de Boussinesq (Ém. Picard, *La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq*, Séance annuelle de l'Académie des Sciences du 11 nov. 1929, p. 29), la seconde de Hilbert (G. Juvet, *La structure des nouvelles théories physiques*, 1933, p. 147)]. Mais *cette expansion soudaine du mathématisme* ne modifie pas seulement l'aspect de la science contemporaine ; elle

---

[60] [ϕ_6], p. 141, 129, respectivement.

[61] Alain BADIOU, ≪Mathematics and philosophy≫, in *Virtual Mathematics*, *op. cit.*, p. 12-29. Pour le platonisme lautmanien, cf. Charles ALUNNI, ≪Albert Lautman et le souci brisé du mouvement≫, *op. cit.*, p. 288-295.

[62] Jean PIAGET, ≪La philosophie de Gustave Juvet≫, *op. cit.*, p. 42.

modifie aussi, rétrospectivement, l'aspect que prend pour nous la science passée, elle y souligne certains traits, en estompe d'autres, bref la montre avec un nouveau visage≫[63].

Plus loin, Blanché établit clairement le lien de ce mathématisme à un certain platonisme :

≪Mais le mouvement qui porte la science contemporaine à éliminer de plus en plus de la physique théorique l'usage de la représentation concrète, ou du moins à ne la tolérer qu'à titre de procédé heuristique provisoire, ne doit pas être porté à l'actif du positivisme. Il n'en serait ainsi que si, selon une simplification usuelle mais abusive, on ne laissait pas de tiers parti entre positivisme et réalisme. En vérité, concevoir l'accès à la science comme une conversion à l'intelligible, renvoyer la représentation sensible à sa fonction biologique, et voir enfin dans l'établissement de relations mathématiques l'office même de l'intelligence, ce sont là, depuis Platon, *les thèses caractéristiques du mathématisme*≫[64].

On ne saurait être ici plus près des positions de Juvet.

≪Cette invasion par la mathématique de tant de domaines où les géomètres grecs pénétraient familièrement, mais que l'impérialisme des gens de lettres et des esthètes a interdits, pour se venger du veto de Platon, à quiconque était géomètre, a pris un nouvel essor parce que la mathématique a trouvé le langage qui permet au philosophe de dire ce qu'est le langage, parce qu'elle a redonné à la métaphysique son objet qu'on avait méconnu, enfin parce qu'elle sait comment les arts redécouvriront la beauté perdue≫[65].

Quant à Suzanne Bachelard, elle précisera la discipline qui illustre de manière paradigmatique le mathématisme contemporain : c'est la physique mathématique pensée comme ≪l'ambition asymptotique de toute science du réel≫ :

≪On ne peut s'installer à moitié dans une attitude de rationalité mathématique [...] Avec la rigueur nous entrons dans un règne nouveau. *Les approximations n'ont pas ici une simple valeur de faits.* Elles doivent être justifiées avant même de recevoir l'épreuve des faits. En somme, des hypothèses de bases aux ultimes approximations, la physique mathématique suit intégralement l'inspiration de l'esprit mathématique. Ce n'est point une science mixte. Pour saisir son exact départ, il faut partir d'une sorte de

[63] Robert BLANCHÉ, *La science physique et la réalité. Réalisme, Positivisme, Mathématisme*, PUF, ≪Bibliothèque de Philosophie Contemporaine≫, Paris, 1948, p. 2-3. Blanché fut beaucoup plus connu pour ses travaux de logique classique que pour cet ouvrage tout à fait remarquable qui se situe dans le prolongement direct des travaux de Bachelard, de Lautman, de Cassirer, de Gonseth et de Juvet. Il est également l'auteur de *Les Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts*, Vrin, Paris, 1966.
[64] *Ibidem*, p. 105. Pour une confrontation instruite mais critique au positivisme, à l'empirisme et au nominalisme, voir l'entier chapitre, ≪Positivisme et mathématisme≫, p. 101-128 et *passim.*
[65] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 28-29. Voir la profonde affinité ≪platonicienne≫ avec le mathématisme ontologique ou l'ontologisme mathématique d'Alain BADIOU, ≪Mathematics and philosophy≫, in *Virtual Mathematics*, *op. cit.*, p. 12-30.

mathématisation des hypothèses de la physique théorique [...] À partir des hypothèses mathématisées on pense davantage qu'avant≫[66].

Enfin, Juvet précise *la racine cartésienne* d'un ≪mathématisme absolu≫ provisoirement défait par la mécanique newtonienne de la ≪force≫, qui est alors jugée comme étant irréductible à l'espace et au temps[67]. C'est ce qu'il qualifie, au dernier paragraphe de [ϕ_6], de ≪rêve de Descartes≫ :

≪Les Nombres de Pythagore, les Idées de Platon, la Mathématique universelle de Descartes, la Caractéristique de Leibniz sont de telles anticipations métaphysiques que la nouvelle philosophie naturelle fondée sur les travaux d'Einstein, de de Broglie, d'Heisenberg, la mathématique moderne créée par Galois, Lie, Cartan, Weyl, confirment et précisent avec l'aide de la méthode axiomatique de Hilbert. Les Nombres et les Idées sont les groupes, le symbolisme des axiomes, c'est la Caractéristique leibnizienne, et les succès sans fin de la mathématique, qui ne se justifient que par la cohérence créée grâce à l'emploi des groupes, *font du rêve de Descartes la réalité d'aujourd'hui*≫[68].

Dés lors, ce mathématisme universel pourrait être décliné selon trois axes convergeant vers les positions cliffordiennes.

3.1. Une philosophie des structures (et) de(s) groupe(s)

≪Les mathématiques, à l'état où notre programme supposé réalisé les aurait développées, seraient à la fois logique formelle et logique appliquée. On pourrait dire, en employant les antiques façons de parler, que les lois qui régissent les structures des groupes sont les lois mêmes de notre pensée alors que leurs invariances (et celles de leurs représentations) sont les lois des choses ; selon qu'on ne voit que la structure et qu'on l'identifie à un réel formalisé par l'esprit, on est idéaliste ; si au contraire, on appuie sur les invariances dans le donné, on est empiriste. Si l'on veut caractériser la tendance philosophique qui se dégage de cette étude, il faut répudier ce vocabulaire suranné et avoir le courage, l'audace, et aussi une certaine présomption dont on est conscient, de dire que *la seule métaphysique des mathématiques, ce sont les mathématiques elles-mêmes, comme elles sont à elles-mêmes leur propre technique et leur propre esthétique*≫[69].

C'est là l'ultime paragraphe de l'ultime texte de Gustave Juvet[70]. Ce testament donne en quelque sorte le dernier mot du tout de sa philosophie. Il représente à la fois le noyau central et le prolongement de ce qui commandait déjà [ϕ_6] dès son titre : *La structure des nouvelles théories physiques.* Dès 1933, la double tâche

[66]Suzanne BACHELARD, *La conscience de rationalité. Étude phénoménologique sur la physique mathématique*, PUF, ≪Bibliothèque de philosophie contemporaine≫, Paris, 1958, p. 11, p. 35 et p. 41. ≪L'expérience ne sollicitait que l'esprit affirmant. Le théorème nous procure l'esprit catégoriant≫, *ibid.*, p. 80 ; ≪La connaissance qui peut être intuitive n'est assurée que lorsque l'esprit a éprouvé la rigueur des propriétés du nombre≫, Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 109.
[67]Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 30.
[68]*Ibid.*, p. 177. Alain Badiou classe Descartes comme le premier des ≪*five majestic examples of the grand style*≫, Alain BADIOU, *op. cit.*, p. 16.
[69]Gustave JUVET, [ϕ_7], p. 33.
[70]C'est là, en à peine 5 feuillets, une œuvre posthume admirable de concision.

de sa réflexion sur les principes lui paraissait être d'une part de mettre en correspondance le dynamisme du réel et celui de l'esprit, et d'autre part de les fonder tous les deux, par une analyse régressive, sur les notions les plus compréhensives et les plus opératoires des mathématiques : celles des *groupes*.

≪Par delà les apparences que les sens perçoivent, le physicien a trouvé l'unité et la permanence ; après une longue enquête, il a reconnu que cette unité, cette permanence s'expriment et se comprennent par la notion de groupe. En même temps, le mathématicien, par delà ses géométries, par delà ses algèbres, a trouvé pourquoi les axiomes qui fixent leur structure ne sont pas arbitraires, il a vu pourquoi ses sciences ne se réduisent pas à leurs seules formes : il a reconnu que leurs bases ne sont pas de simples conventions posées par l'esprit, qui joue et se donne à lui-même son propre spectacle. Le roc que l'esprit a trouvé pour fonder ses constructions, c'est encore le groupe, qui semble donc bien être l'archétype même des êtres mathématiques≫[71].

Si pour lui la physique ne saurait demeurer positiviste, *la structure du réel*, qui déborde ainsi les lois restreintes du positivisme et l'imagination des objets-choses, ne saurait se confondre simplement avec les formes de notre esprit. On ne saurait admettre ni que l'esprit copie sans plus le réel, ni que le réel procède directement de l'esprit, mais seulement qu'il y a *correspondance nécessaire entre les deu*x, de par l'identité profonde de leurs essences :

≪C'est cette identité, devinée avant d'être reconnue, de l'essence mathématique et de l'essence de la réalité physique, qui a égaré les idéalistes, pour lesquels cette essence est dans l'esprit, parce qu'elle y préexiste avant toute démarche mathématique, et les empiristes, pour lesquels toute science ne procède que des empreintes que le monde extérieur fait subir aux organes des sens. Le moins qu'on puisse dire, c'est que le monde mathématique et l'univers sont construits sur un "plan dont la symétrie profonde est, en quelque sorte, présente dans l'intime structure de notre esprit" (Valéry)≫.[72]

Albert Lautman répond ici en un écho directement référencé :

≪La réalité physique n'est donc pas indifférente à cette mathématique qui la décrit ; les constatations expérimentales appellent une mathématique dont elles imitent déjà le dessin [note : Cf. G. Juvet, *La structure des nouvelles théories physiques*, Paris, Librairie

[71] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 59-60.
[72] *Ibid.*, p. 60. Il faut noter, au moins en passant, la place décisive de la *théorie des groupes* dans la pensée et l'écriture de l'œuvre valéryenne : ≪écrire le groupe de transformations qui unit, rend solidaires des phénomènes extérieurs, et ces événements à existence subjective - Voilà ce qui serait extraordinaire. Le groupe de Galilée-Newton, c'est le monde objectif ici. Celui de Lorentz et d'Einstein serait d'y adjoindre le monde sensibilité (1921)≫, Paul VALÉRY, *Cahiers I*, ≪Système≫, Gallimard, ≪Bibliothèque de la Pléiade≫, Paris, 1973, p. 803-804. C'est ce qu'il appelle ≪*mon principe de 92* - Il existe un certain groupe caractéristique de tout ce qu'on nomme phénomènes psychiques, vie intérieure etc. Le problème est de trouver ce groupe (1929)≫, *ibidem*, p. 828.

Alcan, 1933, passim], parfois même avant qu'une mathématique adéquate ait encore été développée pour elles≫[73].

Pour Juvet (comme pour Lautman), *axiomatique*, *relationisme*, *algébrisation*, *groupes* et *structures* sont des notions absolument solidaires. C'est aussi, comme nous allons bientôt le voir plus en détail, la leçon essentielle que Bachelard retient de ses travaux.

1. L'axiomatique d'abord. Même si ≪ce n'est qu'à propos de choses connues qu'on établit une axiomatique≫[74], celle-ci impliquant nécessairement un substrat intuitif, elle n'en est pas moins nécessaire dès le principe :

≪On voit [...] que si l'axiomatique a pour but d'éviter les appels à l'intuition pour ne pas déranger la perspective des déductions, elle jaillit cependant d'une intuition supérieure et synthétique qui tranquillise le logicien et l'assure qu'il ne paiera pas, comme dit Valéry, d'un prix inconnu le plaisir de n'avoir pas l'air d'utiliser le connu. [...] Le mathématicien construit une théorie déductive dont la physique lui suggère les grandes lignes. Un système d'axiomes est à sa base ; c'est un ensemble de propositions dont le but est moins de définir les notions dont use la théorie, que d'indiquer comment elles jouent les unes avec les autres dans la construction qui s'édifie par ce jeu même≫[75].

En d'autres termes, l'axiomatique fixe les règles de la construction. Mais pour notre auteur, la compatibilité d'un système d'axiomes ne saurait se démontrer : elle s'établit par référence à un réalité plus profonde, *par la connaissance du groupe dont ce système procède*. En effet, la logique des classes, cette ≪chétive discipline≫ ne saurait suffire à régir aucune axiomatique[76]. L'accord avec Lautman est, ici encore, complet. Sur les traces de l'axiomatique hilbertienne, ils s'inscrivent tous deux dans une *conception structurale* (voir *infra*) :

≪[Cette conception] substitue à la méthode des définitions génétiques [propres pour Lautman aux théories dinosauriennes du XIXème siècle] celle des définitions axiomatiques, et loin de vouloir reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir de la logique [Lautman attaque ici les protocoles du *Wiener Kreis*], introduit au contraire, en passant de la logique à l'arithmétique et de l'arithmétique à l'analyse, de nouvelles variables et de nouveaux axiomes qui élargissent à chaque fois le domaine des conséquences≫.

[73] Albert LAUTMAN, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique.* Thèse principale pour le Doctorat ès lettres (philosophie), Deuxième partie, ≪Les schémas de genèse≫, in *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union Générale d'Éditions, ≪10/18≫, 1977, p. 147. Il convient de signaler que Juvet et Lautman ont participé au même *Congrès international de philosophie scientifique*, tenu en Sorbonne en 1935, où notre auteur devait prononcer [ϕ_7] et Lautman présenter sa communication sur ≪Mathématiques et réalité≫, in *op.cit.*, p. 281-285.

[74] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 162.

[75] *Ibid.*, p. 162 et p. 145.

[76] ≪Comme la philosophie naturelle est régie par les mathématiques, il est clair que la logique des classes n'y saurait prévaloir, elle est impuissante à décrire la richesse du monde ; toute philosophie qui lie son sort à cette chétive discipline ne peut atteindre que de très modestes buts≫, Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 131. Voilà réglé le compte du logicisme considéré comme ≪little style≫ en philosophie !

Lautman parle alors d'une *synthèse du réel* :

≪Entre la psychologie du mathématicien et la déduction logique, il doit y avoir place pour une caractérisation *intrinsèque* du réel. Il faut qu'il participe à la fois du mouvement de l'intelligence et de la rigueur logique, sans se confondre ni avec l'un, ni avec l'autre, et ce sera notre tâche que d'essayer cette synthèse≫[77].

Pour Juvet, la seule logique apte à la tâche est celle des ≪groupes≫ :

≪Il n'y a pas de théorie déductive qui ne soit une représentation d'un certain groupe [...]. D'une manière générale, il est compréhensible qu'on puisse se donner la structure d'un groupe indépendamment des objets sur lesquels il opère [...]. Toute axiomatique est, d'un certain point de vue, la représentation d'un groupe ; c'est le groupe des opérations qui sont définies par les axiomes et qui agissent sur les objets dont traitent ces axiomes [...]. Une axiomatique ne sera complète que si elle est vraiment la représentation exacte d'un groupe ; tant qu'on n'a pas trouvé le groupe qui la fonde en raison, elle est incomplète ou peut-être déjà contradictoire≫[78].

Dans son précieux commentaire de [ϕ_7], Georges de Rham interroge cette théorie ≪hiérarchique des groupes≫ développée par Juvet :

≪L'idée poursuivie par Juvet, en abordant ces problèmes, semble avoir été de *tirer tout le parti possible de la notion de groupe.* On sait la lumière dont cette notion a éclairé les fondements de la géométrie avec Helmholtz, Lie, Klein et Poincaré. [...] Comme le montre Juvet, il est possible d'associer un groupe (le groupe d'automorphies) à toute théorie déductive. Or, en ce qui concerne les géométries, le procédé indiqué [les éléments du groupe définis comme transformations des figures géométriques] peut être en quelque sorte renversé. On sait, à partir du groupe (supposé donné dans l'abstrait) d'une géométrie, construire une interprétation de cette géométrie. [...] Peut-on aussi renverser ce procédé pour toute théorie déductive et en tirer profit pour prouver la cohérence des axiomes ? Juvet le pensait, sans d'ailleurs se dissimuler les difficultés qui restent à surmonter. [...] Même en se bornant aux théories dont le groupe d'automorphies permet effectivement de construire une interprétation, la marche suivie ne serait satisfaisante que si l'on était assuré *a priori* de l'existence du groupe, sinon le problème ne serait que déplacé. Juvet avait bien vu cette difficulté et il espérait la surmonter à l'aide de cette "hiérarchie des groupes" qu'il introduit dans son travail. Quoi qu'il en soit, *sa tentative nous fait voir ces problèmes d'une manière nouvelle et les relie à la fois aux conceptions de Sophus Lie en géométrie et à celles de Galois en algèbre*≫[79].

[77] Albert LAUTMAN, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique*, ≪Introduction≫, in *Essai sur l'unité*, *op. cit.*, p. 26.
[78] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 31 et p. 169. ≪L'épure axiomatique sous-jacente à la pensée géométrique est elle-même soutenue par une pensée plus profonde qui est ainsi la base primordiale de la psychologie mathématique : cette base, c'est l'idée de groupe≫, Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, op. cit., p. 33.
[79] Georges de RHAM, ≪Brève introduction à la lecture du Mémoire de G. Juvet sur *L'axiomatique et la théorie des groupes*≫, in *Gustave Juvet (1896-1936). In Memoriam*, Société Romande de Philosophie, Imprimerie La Concorde, Lausanne, 1936, p. 5 et p. 6. À noter que l'illustre théoricien des ≪formes harmoniques≫ et des ≪courants≫ sur les variété différentiables était

Mais pour Juvet, la notion de groupe ne définit pas seulement la norme suprême à laquelle obéit l'esprit en ses constructions déductives et axiomatiques : elle est aussi le fil conducteur que doit suivre l'expérience dans sa conquête du monde physique, car si le groupe règle bien le travail de l'esprit, il constitue aussi, et tout aussi profondément, la structure essentielle de la réalité extérieure :

≪À la fine pointe de la théorie mécanique, on retrouve la théorie des groupes et son magnifique impérialisme. [...] Poincaré disait : "L'idée du groupe préexiste dans notre esprit", oui, car notre esprit ne pense qu'avec elle ; mais les groupes existent aussi dans l'univers physique, et celui-là est un savant génial qui sait les y découvrir≫[80].

Tout le monde admet aujourd'hui que les permanences découvertes par l'expérience constituent des invariants de groupes. D'où la mutuelle dépendance qui existe entre l'expérience et l'axiomatique. Il faut qu'il y ait dégagement d'invariants, qu'il y ait émergence d'objets identiques, quelle qu'en soit la description, bref, indépendamment du choix des coordonnées. Cela concerne bien la constitution d'objectivité, c'est-à-dire d'un espace de points de vue reliés par une opération de groupe ou par une connexion sur un fibré principal ; les lois doivent être respectées par changement d'observateur, de repère ou de fibre. C'est déjà ce qu'avait pressenti Valéry grâce peut-être à ses conversations avec Élie Cartan. Mais Juvet va plus loin : pour lui la réalité ne nous offre pas seulement des invariants de groupes, elle est elle-même formée de groupes et sa structure véritable n'est autre que celle des groupes :

≪La structure de la réalité physique est identique à la structure de ces groupes. [...] Ne peut-on pas dire que de son côté la réalité physique imite [...] la structure du groupe, ou comme disait Platon, participe de ce groupe ?≫[81].

Mais comment comprendre que la réalité comme telle consiste en groupes et participe de leur nature ? C'est que les êtres mathématiques existent en soi et que la réalité physique ne constitue qu'une fraction de ces êtres eux-mêmes :

≪Si la matière est nombre, comme disaient les pythagoriciens, nous pouvons croire que tous les êtres mathématiques n'ont pas nécessairement un mode d'exister dans la réalité physique. Sans préciser d'avantage notre pensée, nous dirons que le monde physique n'est qu'un reflet ou une section du monde mathématique≫[82].

2. La structure. On peut dès lors parler d'un véritable ≪structuralisme≫ qui vient se fonder et s'articuler sur l'objectivité de la théorie des groupes. On a

---

déjà présent dans les travaux de Juvet, à une place qui mériterait commentaire : ≪Deux amis, MM. Gex et G. de Rham, m'ont aidé à faire les figures de ce livre et à en corriger les épreuves≫, in [r], p. 6.

[80] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 152 et p. 174.

[81] *Ibidem*, p. 172 et p. 174. ≪Comme on le voit, les schèmes abstraits, fournis par les axiomatiques et les groupes correspondants, déterminent la structure des diverses physiques mathématiques et il faut remonter jusqu'aux groupes pour voir les rapports exacts de ces diverses physiques≫, Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, *op. cit.*, p. 35-36.

[82] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 174 et p. 176.

vu avec Albert Lautman combien l'intérêt d'un problème mathématique ne réside pas dans le plus ou moins grand degré de curiosité que peuvent présenter des faits mathématiques isolés, mais dans les structures, manifestes ou cachées, qui enveloppent ce problème et dont il témoigne. Lautman et Juvet rencontrent ici la pensée ≪structurale≫ d'un Max Born :

≪In every field of experience the correspondence of sense impressions with symbols has been established. It suffices for needs of ordinary life : the words and sentences of a language, whether spoken or written, corresponding to perceptions, emotions, etc. are learned and used without being further analysed (*naïve realism*) [...]. Science goes one step further [...]. There, mathematical symbols are used, and they have a particularity : *they reveal structures*. Mathematics is just the detection and investigation of structures of thinking which lie hidden in the mathematical symbols. The simplest mathematical entity, the chain of integers 1, 2, 3, ..., consists of symbols which are combined according to certain rules, the arithmetical axioms. The most important of these is an internal coordination : to each integer there is one following. These rules determine a vast number of structures ; e. g. the prime numbers with their remarkable properties and complicated distribution, the reciprocity theorems of quadratic residues etc. Geometry has to do with spatial structures which appear analytically as invariants of transformations. Group theory deals with structures which appear when certain sets of operations are repeated, such as the permutations of sets of letters or symmetry operations like rotations or mirror imaging, and others. These are structures of pure thinking. The transition to reality is made by theoretical physics which correlates symbols to observed phenomena. When this can be done, hidden structures are coordinated to phenomena ; *these very structures are regarded by the physicist as the objective reality lying behind the subjective phenomena*≫[83].

Enfin, cette position est assez bien définie par le philosophe Jean Largeault :

≪Le point de vue structuraliste est que la forme est auto-suffisante et n'a pas besoin de s'appuyer sur une substance - bref, l'antithèse des relations externes. Le grand changement de paradigme, s'il y en eut un, ne se situe pas au moment de l'interprétation probabiliste de la Mécanique quantique. Il date de l'introduction du point de vue de la structure en remplacement de celui de la substance. Par l'algèbre (théorie des groupes) et la géométrie (Programme d'Erlangen), les idées de relativité et d'invariance, impliquées dans celle de structure, gagnèrent la physique et la linguistique. La structure ne dépend pas causalement du support ; si elle ne l'engendre pas physiquement, du moins le sens des éléments du support leur est-il prescrit par l'appartenance au tout≫[84].

[83]Max BORN, ≪Symbol and Reality≫, in *Objectivité et réalité dans les différentes sciences*, Archives de l'Institut International des Sciences Théoriques, sous les auspices de la revue *Dialectica*, Bruxelles, 1966, p. 151-152. Voir également la position ≪structuraliste≫ d'André Lichnerowicz, in Alain CONNES, André LICHNEROWICZ, Marc SCHÜTZENBERGER, *Triangle de pensée*, Odile Jacob, Paris, 2000.

[84]Jean LARGEAULT, *Systèmes de la nature*, [Préface de René Thom], Vrin, ≪Problèmes et controverses≫, Paris, 1985, p. 52-53.

Ces principes, mis en œuvre par Juvet, semblent bel et bien converger vers les positions philosophiques de Clifford :

≪Ce que l'on peut dégager, du point de vue philosophique, d'une enquête sur les diverses théories mathématiques modernes, conduite à la lumière des principes que nous venons de formuler, c'est que la matière et la forme ne s'y peuvent disjoindre, l'activité de la pensée n'est pas essentiellement distincte de l'objet sur lequel elle porte≫[85].

3.2. Relationnisme et algébrisation

Conception structurale et théorie des groupes montrent que la détermination d'une essence ne peut être faite que *relativement* à un corps de notions dans une ordination des *essences corrélatives*, et qu'il ne saurait y avoir de *rationalisme ponctuel.* C'est une *conception relationnelle* de l'ontologie qui impose un *rationalisme fonctionnel* dévolu à la complexification des notions physico-mathématiques[86]. C'est précisément à propos de l'évocation par Gustave Juvet de l'axiomatique hilbertienne conçue comme moyen pour la physique contemporaine de dépouiller les notions de leurs attributs empirico-intuitifs en vue de les épurer et de les schématiser, que Bachelard inscrit cette approche dans le cadre d'une *théorie relationniste* :

≪On a donc [= Juvet] bien pris toutes les précautions pour que la compréhension des objets soit, si l'on peut dire, une compréhension par en dessus et non point par en dessous comme l'était la compréhension d'origine substantielle. Autrement dit encore, il s'agit de qualités uniquement relationnelles et nullement substantielles. Mais si ce ne sont pas les objets qui possèdent en eux la racine des relations, si ces objets ne reçoivent *que plus tard* des propriétés avec les relations imposées, on doit se demander avec d'autant plus de soin d'où proviennent ces relations. [...] Une relation unique ne peut donc fournir la base d'un réalisme, dès qu'on se défend de tirer d'une réalité substantielle quelconque l'obligation de préférer une relation à la relation contraire≫[87].

Et c'est sur le modèle de la relativité générale d'Einstein puis de Weyl que, dès 1929, Bachelard fonde ce relationnisme philosophique dont il sera le héraut et qu'il déterminera comme une *véritable ontologie de la relation* - ou *théorie de l'être comme relation* :

[85]Gustave JUVET, [ϕ_7], p. 33. C'est à Jean Largeault qu'on doit l'exhumation de l'ouvrage de Raymond RUYER, *Esquisse d'une philosophie de la structure*, Alcan, Paris, 1930, et en particulier de la formule très cliffordienne : ≪La forme permet de se passer de la force≫, *Esquisse*, cit., p. 24. Voir également, pour un point de vue philosophique qui n'est pas sans affinités, Gilles DELEUZE, ≪À quoi reconnaît-on le structuralisme ?≫, in *L'île déserte et autres textes : textes et entretiens 1975-1995*, Minuit, Paris, 2002

[86]≪Le rationalisme traditionnel est profondément bouleversé par cet usage multiple des notions élémentaires. [...] Le rationalisme en se multipliant devient conditionnel. Il est touché par la relativité : une organisation est rationnelle relativement à un corps de notions. Il n'y a pas de raison absolue. *Le rationalisme est fonctionnel*≫, Gaston BACHELARD, *La philosophie du non. Essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique* [1940], PUF, Paris, 1966, p. 31-32.

[87]Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, *op. cit.*, p. 29-30.

≪La Relativité s'est alors constituée comme un franc système de la relation. Faisant violence à des habitudes - peut-être à des lois - de la pensée, on s'est appliqué à saisir la relation indépendamment des termes reliés, à postuler des liaisons plutôt que des objets, à ne donner une signification aux membres d'une équation qu'en vertu de cette équation, *prenant ainsi les objets comme d'étranges fonctions de la fonction qui les met en rapport*≫[88].

Dès lors, de ce rationalisme relationnel, où le fonctionnement rationnel des concepts détermine une apodicticité de la relation, on passe directement à *l'algébrisation du savoir scientifique*. C'est à nouveau à propos de Juvet que Bachelard définit au plus près ce geste, solidaire du relationnisme, de la structure et du groupe :

≪On pourrait dire à l'être mathématique : dis-moi comment l'on te transforme, je te dirai qui tu es. Comme on le sait, l'équivalence des diverses images géométriques a été définitivement établie quand on eut trouvé que les unes et les autres correspondaient à une même forme algébrique. [...] *La clef de voûte de l'évidence, c'est donc la forme algébrique*. En somme l'algèbre amasse toutes les relations et rien que les relations. C'est en tant que relations que les diverses géométries sont équivalentes. C'est en tant que relations qu'elles ont une réalité et non par référence à un objet, à une expérience, à une image de l'intuition≫[89].

Comme en écho annonciateur d'un *algébrisme spéculatif*, voici ce que Paul Valéry déclarait en 1894 :

≪Je pose que : la Science mathématique dégagée de ses applications telles que la géométrie, l'arithmétique écrite etc. et réduite à l'algèbre, c'est-à-dire à l'analyse des transformations d'un être purement différentiel, composé d'éléments homogènes - est le

[88] Gaston BACHELARD, *La valeur inductive de la Relativité*, Vrin, 1929, p. 98. Dès 1931, ce relationnisme sera étendu au domaine quantique : ≪Il conviendrait donc de fonder une *métamicrophysique* qui n'accepterait pas sans preuve l'état analytique où se présentent les catégories de la métaphysique traditionnelle. Avant tout, il convient de retenir que le plan nouménal du microcosme est un plan essentiellement complexe. Rien de plus dangereux que d'y postuler la simplicité, l'indépendance des êtres, ou même leur unité. Il faut y inscrire de prime abord *la Relation*. AU COMMENCEMENT EST LA RELATION, C'EST POURQUOI LES MATHEMATIQUES RÈGNENT SUR LE REEL≫, Gaston BACHELARD, ≪Noumène et microphysique≫, *Recherches philosophiques*, Paris, 1931-1932, p. 55-65. Aujourd'hui, in Gaston BACHELARD, *Études*, Vrin, Paris, 1970. Citation p. 19. Sur l' ≪*atomisme par la relation*≫, cf. *Les Intuitions atomistiques (Essai de classification)*, Boivin Éditeurs, Paris, 1933, p. 111 ; sur la notion d'≪*atome postulé*≫, voir chapitre VI : *L'atomisme axiomatique*, p. 132-152.

[89] Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, *op. cit.*, p. 28. Bachelard remonte à un cadre originairement relativiste qui n'est pas sans faire songer à la pensée cliffordienne : ≪Mais l'espace-temps a pour lui son algèbre. Il est relation totale et relation pure. Il est donc le phénomène mathématique essentiel≫, *La valeur inductive de la Relativité*, *op. cit.*, p. 99. Dans son article ≪La dialectique philosophique des notions de relativité≫ directement adressé à Einstein, Bachelard parle de ≪l'algébrisme clair et sûr de la doctrine relativiste≫, in *L'engagement rationaliste*, PUF, Paris, 1972, p. 128.

plus fidèle document des propriétés de groupement, de disjonction et de variation de l'esprit (1894)≫[90].

Gustave Juvet fait quant à lui remonter cet ≪algébrisme≫ au XVIIIème et aux débuts du XIXème siècles, au ≪miracle du calcul intégral≫ grâce auquel les savants enthousiastes racontaient leurs expériences dans cette langue nouvelle où les mots - les signes algébriques -, par leur juxtaposition, formaient des phrases riches d'un sens toujours nouveau et toujours renouvelé :

≪C'était presque de la magie. Si les phénomènes ne surgissaient pas effectivement devant les yeux du mathématicien prononçant ses formules algébriques - on pourrait dire incantatoires - du moins son imagination les voyait-elle se dérouler avec toutes leurs modalités dans la suite des équations qu'il écrivait [...]≫[91].

Dans ce dispositif d'algébrisation, il est à noter l'importance de la notion d'*adjonction* que Bachelard thématise, et ça n'est pas un hasard, toujours en connexion à sa lecture de Juvet :

≪[...] Si un amas de relations manifeste une cohérence, cette pensée de cohérence va peu à peu se doubler d'un besoin de complétude qui déterminera des *adjonctions*. Il y a là une démarche synthétique qui tend à achever le corps des relations : c'est alors que la pensée géométrique donne l'impression d'une totalité et c'est alors seulement que la cohérence de la pensée semble se doubler d'une cohésion objective. Nous tenons là le point où apparaît le réel mathématique. Ce réel n'est point contemporain des "objets premiers", pas davantage des relations prises une à une. Mais quand les relations déjà nombreuses réclament un complément, on peut saisir en action la fonction épistémologique essentielle à toute réalisation≫[92].

Cette pensée de l'extension, du prolongement et de l'adjonction, qui est fondée sur l'≪induction *algébrique*≫,[93] souligne l'importance décisive du geste

---

[90]Paul VALÉRY, *Cahiers I*, ≪Système≫, *op.cit.*, p. 775. C'est le premier § du ≪Système≫. Comme les groupes, l'algèbre traverse la recherche sidérante de Valéry. On notera enfin la date de ce performatif : 1894 ! Dans ses ≪Analecta≫ de 1926, il écrit par exemple : ≪Il y a dans l'algèbre quelque chose de la puissance de la "nature" et elle en retire un certain élément de prestige. Je pense à la complication et à la longueur des immenses calculs, aux développements infinis. On a l'impression du travail végétal, d'une répétition qui s'étale, d'une cellule qui se subdivise. L'algèbre seule donne cette impression≫, Paul VALÉRY, *Tel Quel*, in *(Œuvres II)*, Gallimard, ≪Bibliothèque de la Pléiade≫, Paris, 1960, §XXXVI, p. 717.

[91]Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 32. Pour une approche encore antérieure à [ϕ_6], voir Julien PACOTTE, *Pensée mathématique contemporaine*, Alcan, 1925, et en particulier ≪L'algébrisme≫, p. 25-28. Le chapitre II est entièrement consacré au ≪Groupes≫.

[92]Gaston BACHELARD, *Le Nouvel esprit scientifique*, *op. cit.*, p. 30. Sur la notion d'≪adjonction axiomatique≫, cf. *Les Intuitions atomistiques*, *op. cit.*, p. 148.

[93]Gaston BACHELARD, *La valeur inductive de la Relativité*, *op. cit.*, p. 67.

galoisien qui opèrera jusque dans le champ de la physique contemporaine[94]. C'est le sens explicite de la remarque de Juvet :

≪La théorie des groupes a permis d'étendre encore davantage les applications de la mécanique quantique. Cette fois-ci, ce n'est pas un des groupes continus de Lie, comme celui des transformations de Lorentz ou celui des rotations de l'espace, qui joue un rôle dans l'affaire, c'est au contraire un groupe, comme ceux que le génie de Galois a utilisés en algèbre, qui devient essentiel≫[95].

On mesure ici combien c'est une idée extrêmement profonde que de considérer, comme le fait Juvet, la notion de groupe comme l'expression la plus authentique de l'activité normale de l'esprit. Toute organisation intellectuelle, en effet, loin d'aboutir à ces expositions linéaires auxquelles le faux idéal de déduction absolue attribue une valeur de perfection logique, se déploie au contraire en systèmes circulaires, dont les opérations s'appuient les unes sur les autres et dont les généralisations procèdent par extensions d'ensemble.

Dès lors, sur fonds de cette géométrie de la pensée où, si l'on tient une fonctionnalité on tient une réalité, le ≪néo-réalisme≫ (ou ≪néo-rationalisme≫) défendu par Juvet n'a plus qu'à transiter du *réalisme mathématique* au *mathématisme de seconde position* qualifié par Bachelard de *réalisme algébrique* :

≪Le réalisme mathématique - ou plus généralement le réalisme des essences - est une philosophie importante qui a soutenu les pensées des mathématiciens les plus divers, aussi bien des géomètres que des algébristes. Précisément, il y a grand intérêt philosophique à donner aux *formes algébriques* la même valeur ontologique qu'aux *formes géométriques*. Il est philosophiquement très curieux de voir *une connaissance discursive* comme l'est la connaissance algébrique recevoir le même statut ontologique qu'une *connaissance intuitive* comme l'est, dans ses origines, la connaissance géométrique≫[96].

3.3. Une philosophie d'opérateurs

Cette philosophie fonctionnelle, groupoïdale et adjonctive, est déjà - faut-il s'y appesantir ? - très fortement ≪cliffparallèle≫ au dispositif pionnier de William Kingdon Clifford : qu'il s'agisse de la place de la structure de groupe dans l'élaboration du ≪complexe de conscience≫, de la question fondamentale du parallélisme ou du jugement d'analogie. Elle va maintenant pouvoir s'illustrer comme cette philosophie ≪opératorielle≫ que Bachelard réclamait de ses voeux. Et c'est là

---

[94] Pour une première approche philosophique du procédé d'*adjonction* galoisienne, voir Jules VUILLEMIN, *La philosophie de l'algèbre*, Tome Premier, PUF, ≪Épiméthée≫, Paris, 1962, chapitre IV, ≪La théorie de Galois≫. Pour une approche contemporaine, voir Daniel BENNEQUIN, ≪Questions de physique galoisienne≫, in *Passion des Formes. À René Thom* [dir. Michèle PORTE], ENS Éditions, Fontenay-aux-Roses, 1995 ; Alain CONNES, *La pensée d'Évariste Galois et le formalisme moderne*, téléchargeable sur ftp ://ftp.alainconnes.org/galoistext.pdf.

[95] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 151.

[96] Gaston BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, *op. cit.*, p. 27. Sur cette *ontologie algébrique* où le géométrique et l'algébrique échangent leurs puissances rationalistes d'invention, sur le ≪bilinguisme≫ et sur la ≪bi-organisation≫ du *rationalisme électrique*, voir, *ibid.*, p. 156-169.

sans doute la connexion la plus directe au noyau spéculatif d'une pensée cliffordienne adossée à la théorie des opérateurs quaternioniques et spinoriels. Daniel Parrochia a très brillamment pointé deux des moments essentiels à la philosophie de Clifford : une conception mathématique de la *correspondance fonctionnelle* (pour une définition du parallélisme *Body-Mind*) ; une théorisation et une mise en œuvre raffinées de la notion d'*opérateur* (pour les produits), à travers les notions de *verseurs*, de *rotors* et de *vecteurs*[97]. Ces deux instances, très fortement corrélés, sont en fait au cœur des enjeux scientifiques initiaux de l'œuvre juvétienne.

(a). On peut évidemment rattacher *l'instance du fonctionnel* chez Juvet au tissage patient des liens existant entre *mécanique analytique* et *analyse fonctionnelle*, ainsi qu'à ses recherches sur le *calcul variationnel*[98]. Pour la mécanique analytique, je ne reviens pas sur le travail de rapprochement et d'harmonisation opéré par [n], à partir des théories de Vessiot, des *invariants intégraux* de Cartan, des *Vorlesungen* de Jacobi et des nouvelles méthodes de la mécanique céleste de Poincaré. C'était déjà tout son travail de Thèse. Il est par contre remarquable de voir quelle leçon philosophique en tire, pour lui-même, l'auteur du *Cimetière marin* et de *L'introduction à la méthode de Léonard de Vinci* :

≪L'avantage de la mécanique analytique de rappeler par les équations de condition et par l'obligation des références tout ce qui agit dans un phénomène m'a tellement frappé que *ce type s'impose toujours à moi en toute question.*

Une notion, une pensée, une proposition considérées dans le réel de leur formation, de leur production, des effets de divers ordres qu'elles entraînent [...] impliquent des conditions - des références - des possibles aussi - que l'on oublie toujours quand on raisonne, qu'on fonde sur elles.

Par exemple un point capital - Les équations de *conservation* (1929)≫[99].

Concernant l'analyse fonctionnelle, et avant même ses travaux sur la mécanique quantique et l'équation de Dirac, Juvet y avait particulièrement brillé par son étude et par sa généralisation des travaux de Vito Volterra[100], Jacques Hadamard[101] et Paul Lévy[102]. Dans sa construction de l'analogue de l'équation de

[97] Daniel PARROCHIA, ici même, *passim.* Voir également, Luciano BOI, ≪Géométrie elliptique non-euclidienne et théorie des biquaternions chez Clifford : l'élaboration d'une algèbre géométrique≫, in [dir. Dominique FLAMENT], *Le nombre une hydre à n visages. Entre nombres complexes et vecteurs*, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1997, p. 209-238. Pour un point de vue historique, cf. Michael J. CROWE, *A History of Vector Analysis*, *op. cit.*, *passim.*

[98] Voir [b], [f], [g], [j], [n], [o], [x].

[99] Paul VALERY, *Cahiers I*, ≪Système≫, *op. cit.*, p. 831.

[100] Vito Volterra (1860-1940), ancien normalien pisan, sera le successeur de Beltrami à la chaire de physique mathématique de Rome en 1890. Si le terme de *fonctionnelle* trouve son origine dans le cadre du calcul des variations - pour désigner des fonctions dont les arguments sont eux-mêmes des fonctions -, c'est à Volterra qu'on doit son emploi généralisé à de nouveaux domaines.

[101] Jacques Hadamard (1865-1963) est l'auteur, en 1910, de *Leçons sur le calcul des variations.* Ses *Leçons d'analyse fonctionnelle* sont considérées comme la première pierre de cette théorie. Il a lui-même introduit le terme de ≪fonctionnelle≫ dès 1910.

[102] Paul Lévy (1886-1971) est l'auteur de *Leçons d'analyse fonctionnelle*, en 1922.

Jacobi pour la variation d'une intégrale multiple dans un n-espace, Juvet avait été conduit à démontrer la complète intégrabilité de l'équation de Jacobi généralisée, condition précisément introduite en calcul fonctionnel par Paul Lévy[103]. Ce ≪rationalisme *fonctionnel*≫ constitue, en tant que tel, le premier moment d'un *programme philosophique* très précisément formulé par Bachelard :

≪Le spectre philosophique est complet, qui va depuis la science concrète des mécanismes jusqu'à cette science abstraite qu'est la mécanique analytique conçue suivant l'idéal de Lagrange, sans aucune figure, tout entière en équations. Entre ces pôles extrêmes, on ferait place à la mécanique géométrisée, à la mécanique des vecteurs, des vecteurs tourbillons, des divergences et l'on verrait se constituer une philosophie abstraite-concrète du mouvement. On aurait ainsi un centre de discussions philosophiques actif et il ne serait pas difficile de montrer *le rôle progressivement dominant du pôle abstrait.* Il suffirait pour cela de suivre l'évolution qui va des équations de Lagrange aux équations de Hamilton, puis de considérer les méthodes actuelles où l'on utilise *formellement* l'hamiltonien (expression mathématique tirée de l'équation exprimant le principe de la conservation de l'énergie) en transformant cet hamiltonien en un *groupement d'opérateurs.* On verrait ainsi la pensée qui organise l'expérience en une éminente corrélation des notions abstraites≫.[104].

(b). Par son travail absolument pionnier sur le rôle des opérateurs différentiels (cf. en particulier [r] et [t]), Juvet répond aux critères d'effectivité de ce *programme opératoriel*[105]. Voici comment il en présente un exemple par reconstruction du passage de la *mécanique ondulatoire* à la *mécanique quantique*, via les opérateurs, et plus précisément via l'ouvrage fondamental d'Hermann Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de 1931 :

≪On pourrait exposer le début de la théorie déductive de M. Weyl de la façon suivante : soit un symbole qu'on appellera du nom même de la lettre grecque qui le désigne, *psi* ; c'est une fonction de quatre variables ; transformons cette fonction au moyen d'un opérateur analytique, l'hamiltonien, dont la forme est suggérée par une épuration de la mécanique analytique classique ; si le résultat de l'opération est un multiple de *psi*, on

---

[103] Il faudrait comparer ici les positions philosophiques de Juvet et de Lévy sur le statut des mathématiques. Sur ce point, Paul LEVY, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Blanchard, Paris, 1970. L'œuvre d'un autre spécialiste d'analyse fonctionnelle, élève d'Hadamard, reste essentielle pour la reconstruction de cette séquence : c'est celle de Maurice Fréchet (1878-1973). Voir, Maurice FRÉCHET, *Les espaces abstraits. Introduction à l'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 ; *Pages choisies d'analyse générale*, ≪Collection de logique mathématique≫, Gauthier-Villars, Paris, 1953 ; M. BARBUT, B. LOCKER et L. MALZIAK, *Paul Lévy, Maurice Fréchet : 50 ans de correspondance mathématique*, Hermann, Paris, 2004.

[104] Gaston BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, *op. cit.*, p. 172. Sur l'importance de cette analyse fonctionnelle, de sa rationalité marquée par la ≪montée vers l'absolu≫ et de son rôle central dans la construction des ≪mixtes≫, cf. Albert LAUTMAN, *Essai*, *op. cit.*, p. 106 sq. et, plus généralement, *passim.*

[105] ≪Autant dire que le rationalisme est une *philosophie fonctionnelle*, une philosophie d'opérations - ou plutôt [...] une philosophie d'opérateurs. Ce n'est pas une philosophie existentielle. Le rationalisme ne prétend pas pénétrer dans l'individualité d'une existence. Il ne commence à penser qu'en établissant des relations≫, Gaston BACHELARD, *ibid.*, p. 184-185.

dira que *psi* est stationnaire, et le facteur de *psi* sera un nombre dont l'interprétation physique sera l'énergie du système, auquel cette même interprétation aura fait correspondre l'hamiltonien employé. Telle est la forme que prend, dans un exposé dépouillé, l'idée même d'équation des ondes ; le mot *onde*, trop chargé de sens, est remplacé par *psy*≫[106].

C'est le moment philosophiquement déterminant du passage de l'≪épistémologie réaliste≫ à l'≪épistémologie opératorielle≫, via ≪l'épistémologie symbolique≫ :

≪Les mathématiques de la science quantique viennent en effet de donner une soudaine importance à la notion d'opérateur. Cette notion apporte une tonalité philosophique nouvelle, assez difficile à saisir dans sa nuance [...].

[En mécanique classique] on a ainsi représenté l'énergie par une fonction des coordonnées du corpuscule et des composantes de sa quantité de mouvement (ou moments de Lagrange) [...]. Cette représentation mathématique est alors comme un langage qui relate des événements physiques. Nous sommes donc en présence de l'ancienne épistémologie qui était *réaliste* en ce qui concerne les événements, *linguistique* en ce qui concerne les mathématiques. Soulignons bien que d'après cette épistémologie, les mathématiques ne *pensent* pas, elles *expriment*.

Passons maintenant à *l'épistémologie symbolique*. Pour cela, vidons les termes mathématiques de leur signification réelle. [...] C'est l'organisation des symboles qui nous intéresse désormais [...]. L'expression de E, expression qu'on appelle la fonction hamiltonienne du problème, sera ainsi une sorte de grille propre à traduire toutes les relations expérimentales dans le cas du point matériel mobile dans un champ de forces [...].

Voyons alors une soudaine vie des symboles qui nous paraît bien correspondre à un dynamisme nouveau de la pensée mathématique. Ces symboles que l'activité de la pensée dématérialisante a transformés en pures formes, nous allons les transformer en *opérateurs*≫[107].

C'est à cette pointe avancée de l'analyse fonctionnelle, où ≪il a fallu compliquer la forme du *psi*≫[108], que vient s'articuler ce que Bachelard qualifie de *surrationalisme dialectique*[109] et dont le point d'application exemplaire n'est autre

---

[106] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 146-147.

[107] Gaston BACHELARD, *L'expérience de l'espace*, *op. cit.*, chapitre IV, ≪Les opérateurs mathématiques≫, p. 87-88, p. 89-90, et p. 91. Sur l'importance philosophique de la notion d'≪opérateur≫, voir également, Julien PACOTTE, *La connaissance. Mathématique, technique, humanisme, métaphysique*, Alcan, Paris, 1934, chap. I, ≪Axiomatique et opérateurs abstraits≫, p. 7-44. Également, Julien PACOTTE, *L'espace hermitien quantique*, ASI, Hermann, Paris, 1938. À noter qu'en 1929, Pacotte avait déjà publié, dans la collection de Gustave Juvet aux éditions Blanchard, *Les Méthodes nouvelles en Analyse quantique*.

[108] ≪On a vu qu'il a fallu compliquer la forme du *psi*, soit avec les deux composantes de Pauli d'abord, soit ensuite avec les quatre composantes de Dirac ; en fait cette complication était un bien car c'est grâce à elle que le groupe de Lorentz a pu s'exprimer dans la nouvelle mécanique≫, Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 152. Ces développements prennent place au cœur même du chapitre consacré à la *théorie des groupes*.

[109] Le ≪Surrationalisme≫ donne son titre à un texte de Gaston Bachelard publié en 1936 dans le N^o 1 de l'*Organe du Groupe d'Études pour la Phénoménologie Humaine*, dirigé par Aragon, Caillois, Monnerot et Tzara, intitulé, *Inquisitions*. Il n'en sortira que ce seul numéro, *Du*

que *la mécanique de Dirac*[110]. C'est là une ≪dialectique externe, une dialectique qu'on n'aurait jamais trouvée en méditant sur l'essence du concept de masse, en creusant la notion newtonienne et relativiste de masse≫[111]. L'acmé, enfin, en sera la notion de *spin*.

≪À elle seule, la notion de spin pourrait faire l'objet d'un congrès de philosophes en quête de discussions précises. Cette notion serait fort propre à déterminer une analyse spectrale des philosophies de la connaissance. On verrait diverger les réalistes et les rationalistes, les expérimentateurs et les théoriciens. On se rendrait ensuite bientôt compte que le débat n'est pas seulement celui des infra-réalistes et des ultra-mathématiciens, mais qu'un véritable dialogue central montre l'action de la double évidence des techniques fines et des schèmes mathématiques appropriés≫[112].

Gustave Juvet en synthétise finalement l'enjeu dans son propre dispositif :

≪M. W. Pauli, émule d'Heisenberg, montra que l'effet de ce mouvement de rotation, de ce *spin* comme on dit couramment, pour employer le terme anglais plus bref que rotation propre et plus exact que pivotement, peut s'expliquer en modifiant un peu les hamiltoniens et surtout en représentant le *psi* par deux fonctions et non plus par une seule ; il était réservé à M. Dirac, dont les contributions à la théorie quantique avaient déjà été très importantes, de dépouiller le *spin* de son sens physique trop précis et difficilement conciliable avec les relations d'Heisenberg, et de montrer que ce n'est pas par une modification arbitraire des hamiltoniens - trop aisée à faire pour les besoins de la cause - qu'il faut en justifier l'existence, mais qu'il découle d'une application judicieuse du principe de relativité≫[113].

3.4. Vers une philosophie symplectique

Un même geste spéculatif caractérise ainsi la pensée essentielle de William Kingdon Clifford et Gustave Juvet : la ≪complexification de la science≫. Il faut bien évidemment l'entendre selon toute l'extension déclinable du terme ≪complexe≫. Il en va ici du statut de l'imaginaire, de l'étendue de son spectre, qu'il soit (celui du) mathématicien ou que, de manière plus générale, il relève d'une

Surréalisme au Front Populaire. Inquisitions, Fac-similé de la revue augmenté de documents inédits présenté par Henri Béhar, Éditions du CNRS, Paris, 1990. Sur la dimension européenne de ce courant, cf. Charles ALUNNI, Éric BRIAN, Éric ÉMERY [dir.], *Sciences & philosophie au XXème siècle. L'École de Zürich et le programme surrationaliste*, *Revue de synthèse*, 5e série, Éditions-Rue d'Ulm, Paris, 2005/2.

[110] Gaston BACHELARD, *La philosophie du non*, *op. cit.*, p. 33.

[111] Gaston BACHELARD, *ibid.*, p. 35. ≪L'essentialisme, dans une philosophie de la relation rationnelle, est un extrinséquisme [...]. Nous allons insister sur la *rationalisation extérioriste* de la pensée physicienne - entendons par là une rationalisation par la clarté des fonctions coopérantes, une *rationalisation opératoire* qui n'a pas à se préoccuper du réalisme platonicien intime des notions isolées≫, Gaston BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, *op. cit.*, p. 33 et p. 154.

[112] Gaston BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, *op. cit.*, p. 163.

[113] Gustave JUVET, [ϕ_6], p. 147-148.

faculté d'idéation [114]. C'est ce que Gaston Bachelard met en scène comme relevant du ≪principe pédagogique de l'imaginaire mathématique≫, un principe particulièrement bien maîtrisé par nos deux auteurs :

> ≪Ce principe nous paraît marqué au coin d'une *induction* si audacieusement extensive qu'elle peut dérouter un esprit peu habitué aux libertés mathématiques. La difficulté dans le maniement de l'imaginaire [...] c'est de maintenir dans l'esprit l'exemple réel [...], puis de penser en même temps l'extension des propriétés considérées, que cette extension aborde un monde imaginaire ou bien une dimension supplémentaire. Ainsi *l'imaginaire dépasse l'imagination*, il fait en quelque sorte violence aux enseignements du réel, il substitue au permanent de fait le permanent de droit. Il permet d'*adjoindre* le possible à la réalité, sans risquer d'être dupe de l'extension donnée aux concepts, puisqu'il désigne toujours d'un signe distinctif *le motif* de l'adjonction. En résumé, *l'imaginaire est un véritable opérateur de généralisation*≫[115].

Là, en relativité, ici, en méquantique, l'instant de formalisme se trouve en quelque sorte entre la connaissance d'un passé réel et la prévision d'un possible futur. Réalisme, formalisme, probabilisme sont ainsi placés sous la domination d'un geste inducteur qui règle, à la fois, la prise réaliste des phénomènes, le formalisme des substitutions, l'interprétation des probabilités. Et puisque cette *orientation inductive* de (et *dans*) la pensée[116] implique *une géométrie de l'entrelacement* (du dispositif *matériel* et du dispositif *formel*), je la qualifierai ici d'≪induction *symplectique*≫. Il suffit de rappeler que le grec $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\varepsilon\kappa\tau\iota\kappa o\varsigma$ signifie proprement ≪qui entrelace≫, en particulier dans le contexte des sciences naturelles (≪qui est *entrelacé* avec une autre corps ou une autre partie≫) ; ce qui a donné le latin *complexus* (enlacement) et *complex* (uni, joint), eux-mêmes dérivés de *complector* (qui signifie, en son sens figuré, ≪SAISIR par l'intelligence, par la pensée,

---

[114] Sur ce point, voir Alain CONNES, ≪À la recherche d'espaces conjugués≫, in Ilke Angela MARECHAL, *Sciences et Imaginaire*, Paris, Albain Michel, 1998 : ≪Ainsi, pour moi, la représentation mentale algébrique a les mêmes ingrédients, à la fois linguistique et musique, que la poésie [...]. La réalité mathématique brute a *une nature inductive.* L'activité du mathématicien la comprend *de manière projective*≫ [nous soulignons]. Sur ce *topos projectif* chez Alain Connes, son lien à la ≪réalité archaïque≫ et sur son inscription générale dans une théorie étendue de la *traduction* comme *in*(-)*tra*(-)*duction*, cf. Charles ALUNNI, *Tradition-Transmission-Traduction. L'action d'un foncteur universel*, Mémoire d'HDR, tapuscrit, ENS, Paris, novembre 2003.

[115] Gaston BACHELARD, *La valeur inductive*, *op. cit.*, p. 61-62. ≪Le facteur imaginaire i [dans l'opérateur de l'Hamiltonien] indique assez que nous désertons la réalité≫, Gaston BACHELARD, *L'expérience de l'espace*, *op. cit.*, p. 92.

[116] Sur ce point, cf. Charles ALUNNI, ≪Einstein, Bachelard, De Rham et l'orientation "inductive" de la pensée≫, in *Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée ?*, Collège de France, Conférence du jeudi 17 mars 2005, *Séminaire Astroparticules et Cosmologie*, http ://cdfinfo.in2p3.fr/APC_CS/Labo/Calendar/semin-eng. Pour une analyse complète du concept d'*induction* tel qu'il est dégagé à partir de son cadre relativiste par Gaston Bachelard, cf. Charles ALUNNI, ≪Relativités et puissances spectrales chez Gaston Bachelard≫, in *Revue de synthèse*, T. 120, ≪Pensée des sciences≫, n° 1, janvier-mars 1999, p. 73-110.

par la mémoire ou par l'imagination≫ et ≪embrasser [comprendre] dans un exposé : *una comprehensione omnia complecti* = ≪comprendre tout dans une formule unique≫). L'utilisation de ce mot en mathématiques est due à Hermann Weyl qui, dans un effort pour éviter une confusion sémantique, a rebaptisé l'obscur (pour l'époque) ≪groupe du complexe linéaire≫, du nom de ≪*groupe symplectique*≫ :

> ≪The name "complex group" formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word "complex" in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective "symplectic"≫[117].

Quelle que soit son étymologie, l'adjectif ≪symplectique≫ signifie fondamentalement ≪tressés ensemble≫ ou ≪tissés≫ ; et c'est cet *effet de tresse* ≪par *self-induction*≫ qui pourrait qualifier l'actualité philosophique du binôme Clifford-Juvet.

Bibliographie Scientifique de Gustave Juvet[118]

1. **Publications scientifiques générales :**

a. *Introduction aux théories d'Einstein en vue de leur application à l'astronomie.* Leçon inaugurale prononcée à l'Université de Neuchâtel, 1921.
b. *Quelques remarques à propos des équations différentielles et des équations intégrales.* Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles, 1921, t. 45.
c. *Quelques remarques sur les équations de la gravitation.* Archives des Sciences Physiques et Naturelles, 1921.
d. *Les formules de Frenet pour un espace de Weyl.* Compte Rendu, Académie des Sciences, Paris, t. 172, 1921.
e. *Sur la méthode de la variation des constantes en mécanique céleste.* Enseignement Mathématique, t. 22, 1921.
f. *Les équations aux dérivées fonctionnelles et la théorie de la relativité.* Enseignement Mathématique, t. 22, 1921.
g. *Sur le principe de moindre action en électromagnétisme.* Archives des Sciences Physiques et Naturelles, 1921.
h. *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu.* 1 vol. (avec une préface de Jacques Hadamard), Blanchard, Paris, 1922.
i. *À propos de la transformation de Lorentz.* Archives des Sciences Physiques et Naturelles, 1922.
j. *Sur une généralisation du théorème de Jacobi.* Compte Rendu, Académie des Sciences, Paris, t. 176, 1923.

[117]Cf. Hermann WEYL, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations* [1938], Princeton University Press, Princeton, 1946, Chap. VI, ≪The symplectic group≫, p. 165. On sait que l'un des pionniers de la ≪Géométrie Symplectique≫ n'est autre que Jean-Marie Souriau.
[118]Pour une bibliographie exhaustive, cf. le volume *À la mémoire de Gustave Juvet 1896-1936*, *op.cit.*, p. 7-11.

k. *Sur le déplacement parallèle le plus général et sur les formules de Frenet.* Compte Rendu, Académie des Sciences, Paris, t. 178, 1924.
l. *Sur un problème de mécanique céleste et de dynamique quantique.* Archives des Sciences Physiques et Naturelles, 1924.
m. *Sur le déplacement parallèle le plus général et sur l'étude des courbes tracées dans une multiplicité quelconque.* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 53, 1925.
n. *Mécanique analytique et théorie des quanta*, 1 vol., Blanchard, Paris, 1926.
o. *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi*, Thèse, Blanchard, Paris 1926.
p. *Les espaces de Weyl* (2ème Thèse manuscrite), 1926.
q. *Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la relativité.* Commentarii Mathematici Helvetici, 3, Zürich Leipzig, 1931.
r. *Leçons d'analyse vectorielle.* 1ère partie. *Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs.* 1 vol., Rouge & Gauthier-Villars, Lausanne-Paris, 1933.
s. *La théorie des groupes et la physique des champs.* Revue Générale d'Électricité, Paris, 1934, vol. XXXVI, n° 5 et 6.
t. *Leçons d'analyse vectorielle*, 2ème partie. *Application de l'analyse vectorielle. Introduction à la physique mathématique*, 1 vol., Rouge & Gauthier-Villars, Lausanne-Paris, 1935.

2. **Autour de Kaluza-Klein :**

u. (En collaboration avec Ferdinand GONSETH) : 4 notes à l'Académie des Sciences. Compte Rendu, 1927, t. 185 : *Sur les équations de l'électromagnétisme* ; *Sur la métrique de l'espace à 5 dimensions de l'électromagnétisme et de la gravitation* ; *Sur l'équation de Schrödinger* ; *Les équations de l'électromagnétisme et l'équation de Schrödinger dans l'univers à 5 dimensions.*
v. (En collaboration avec Ferdinand GONSETH) : *Sur la relativité à 5 dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger.* Actes de la Société Helvétique de Physique, 1928 (I).
w. (En collaboration avec Ferdinand GONSETH) : *Sur la relativité à 5 dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger.* Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologne, LV.
x. *Mécanique analytique et mécanique ondulatoire*, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

3. **Autour de Clifford :**

Cl_1. *Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell.* Commentarii Mathematici Helvetici, 2, Zürich Leipzig, 1930, p. 225-235.
Cl_2. *Les nombres de Clifford et leurs applications à la physique mathématique.*

Congrès International des Mathématiques, Zürich, 1932.
Cl_3. (En collaboration avec Alexandre SCHIDLOF) : *Sur les nombres hypercomplexes de Clifford et leurs applications à l'analyse vectorielle ordinaire, à l'électromagnétisme de Minkowski et à la théorie de Dirac.* Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences Naturelles, (Année 1932) t. 57, Neuchâtel 1933, p. 127-147.
Cl_4. *Les rotations de l'espace euclidien à quatre dimensions, leur expression au moyen des nombres de Clifford et leurs relations avec la théorie des spineurs.* Commentarii Mathematici Helvetici, 8, Zürich Leipzig 1936, p. 264-304.

4. **Publications de philosophie des sciences :**

ϕ_1. *Les principes du calcul différentiel absolu et du calcul tensoriel et quelques-unes de leurs applications.* Revue Générale des Sciences, 1923.
ϕ_2. *Henri Poincaré et la théorie de la relativité.* Revue Générale des Sciences, Paris, 1924.
ϕ_3. *Sur les géométries différentielles.* Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles, 1924.
ϕ_4. *Les Fondements des Mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme.* Revue Générale des Sciences, Paris, 1927.
ϕ_5. *Considérations sur la relativité et sur les théories physiques.* Bulletin Technique, février et mars 1929. *Leçon inaugurale du 18 décembre 1928*, Librairie Rouge, Lausanne, 1929.
ϕ_6. *La structure des nouvelles théories physiques*, 1 vol., ≪Nouvelle Collection Scientifique≫ (dir. Émile Borel), XI-184 pages, Alcan, Paris (Prix de l'Académie des sciences), 1933.
ϕ_7. *L'axiomatique et la théorie des groupes.* Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Hermann, Paris, 1936, N° 393, T. VI.

C. Alunni
Laboratoire Disciplinaire "Pensée des Sciences"
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
and
Scuola Normale Superiore
56100 Pisa
Italy
e-mail: `alunni@ens.fr`
URL: `http ://www.ens.fr/pense-science/`

Received: June, 2006.
Accepted: November, 2006.